云南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6):1059~1070 DOI: 10.7540/j.ynu.20210006
Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition

L_2 上复变函数的傅里叶级数逼近

杨　刚，谷　懿**
(云南大学 数学与统计学院，云南 昆明　650500)

摘要: 考虑定义在圆盘 $\mathrm{U}=\left\{z\in\mathbf{C}:\dfrac{1}{2}<|z|<1\right\}$ 上解析且原点为其本性奇点的特殊复函数类的逼近. 得到最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 分别与函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模及 $\mathcal{K}$ 泛函的精确 Jackson 不等式. 然后, 研究最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 与函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模在区间 $(0,h)$ 上的加权积分之间关系, 得到相应的精确 Jackson 不等式. 最后, 得到关于函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模, 函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模在区间 $(0,h)$ 上的加权积分和 $\mathcal{K}$ 泛函等函数类上的最佳逼近及 n 维宽度.

关键词: 最佳逼近; m 阶连续模; $\mathcal{K}$ 泛函; n 维宽度
中图分类号: O174.41　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 0258−7971(2021)06−1059−12

精确的 Jackson 不等式研究已经有 50 余年的历史, 为了叙述已有的研究结果, 先叙述一些相应的记号; $L_2(\mathrm{U})$ 表示自变量在区域 U 内平方可积的复函数空间. 在 $L_2(\mathrm{U})$ 上定义函数 f 范数为

$$\|f\|_2:=\left(\frac{1}{\pi}\iint_{(\mathrm{U})}|f(z)|\,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

这里 $|f(z)|$ 表示函数 f 的模, P_n 为次数不高于 n 的代数多项式函数空间. 函数空间 P_n 对函数 f 的最佳逼近表达式为

$$E_{n-1}(f)_2:=\inf\{\|f-g\|_2:\forall g\in P_{n-1}\}.$$

在复数域上 $\mathcal{K}$ 泛函[1] 表达式为

$$\mathcal{K}_m(f,t^m)_2:=\mathcal{K}\left(f;t^m;L_2;L_2^{(m)}\right)=\inf\left\{\|f-g\|_2+t^m\left\|z^m g^{(m)}\right\|_2:g\in L_2^{(m)}\right\}.$$

Saidusaynov[1] 和 Shabozov 等[2] 研究 $L_2(\mathrm{U})$, $\mathrm{U}=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 上解析函数的逼近问题, 得到 $\mathcal{K}$ 泛函与最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 的精确 Jackson 不等式和关于 $\mathcal{K}$ 泛函的函数类的宽度.

Shabozov 等[2] 定义 $L_2(\mathrm{U})$, $\mathrm{U}=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 上解析函数的平移算子 F_h:

$$F_h(f)=\frac{1}{\pi}\iint_{(\mathrm{U})}f(\xi)T(z,\xi,h)\,\mathrm{d}\sigma=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k(1-h)^k,$$

其中函数 $T(\xi,\eta,h)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k}(\eta)(1-h)^k$, $\left\{\varphi_k(z)=z^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ 为正交系统. 得到函数 f 的一阶差分为

$$\Delta_h^1 f(z)=F_h(f(z))-f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k\left((1-h)^k-1\right).$$

计算可得函数 f 的 m 阶差分为

$$\Delta_h^m f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k(f)z^k\left(1-(1-h)^k\right)^m.$$

收稿日期: 2021-01-01;　接受日期: 2021-07-25;　网络出版日期: 2021-10-14
基金项目: 国家自然科学基金(11761077).
作者简介: 杨　刚(1994−), 男, 四川人, 硕士生, 主要研究函数逼近论. E-mail: 3020044274@qq.com.
** 通信作者: 谷　懿(1983−), 男, 山东人, 博士, 讲师, 主要研究函数逼近论. E-mail: guyi@yun.edu.cn.

根据平移算子定义了 m 阶连续模

$$\Omega_m(f,t)_2 := \sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2 : 0<h\leqslant t\right\}.$$

给出最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 与函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模 $\Omega_m\left(z^r f^{(r)},t\right)_2$ 的精确 Jackson 不等式和关于 $\Omega_m\left(z^r f^{(r)},t\right)_2$ 的函数类的宽度(也可参考文献 [3] ~ [4]). Shabozov 等[5] 得到分别关于 m 阶连续模和 $\mathcal{K}$ 泛函这 2 个函数类的最佳逼近. Abilov[4] 等得到关于最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 和 m 阶连续模的 Jackson 不等式的逆定理.

在实数域 $\mathbf{R}$ 上, Vakarchuk[6] 给出在 $L_2(\mathbf{R})$ 上的关于 $\mathcal{K}$ 泛函的函数类宽度. Vakarchuk[7] 和 Vinogeadov 等[8] 在 $L_2(\mathbf{R})$ 上得到最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 和连续模的精确 Jackson 不等式(也可参考文献 [9]); Esmaganbetov[10] 在 $L_2\left(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right)$ 上得到最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 与连续模的精确 Jackson 不等式以及函数类的宽度. Trigub[11] 在 $L_2[0,1]$ 上用多项式函数逼近光滑函数得到最佳逼近的估计. 参考文献 [12] ~ [13] 讨论了函数以及算子的一些相关性质. 在文献 [14] 中, 孙永生介绍了经典的精确 Jackson 不等式.

1 预备知识

基于以上研究成果, 本文考虑 $L_2(\mathrm{U}),\ \mathrm{U}=\left\{z\in\mathbf{C}:\dfrac{1}{2}<|z|<1\right\}$ 上的函数空间, 在 $\mathrm{U}=\left\{z\in\mathbf{C}:\dfrac{1}{2}<|z|<1\right\}$ 上函数 f 解析且有 $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_{-k}(f)z^{-k}$ 的洛朗展式. 我们给出了平移算子, 构造了关于函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模. 得到关于最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 分别与函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模和 $\mathcal{K}$ 泛函的精确 Jackson 不等式; 引入权函数 $q(t)$, 得到函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模在区间 $(0,h)$ 上的加权积分与最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 的精确 Jackson 不等式. 再分别定义了关于函数 $z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模、$z^r f^{(r)}$ 的 m 阶连续模在区间 $(0,h)$ 上加权积分和 $\mathcal{K}$ 泛函的函数类, 最后得到了 3 种函数类的最佳逼近及宽度.

我们取 $\mathrm{U}=\left\{z\in\mathbf{C}:\dfrac{1}{2}<|z|<1\right\}$, 序列函数 $\varphi_k=z^k, k\in\mathbf{Z}$, 则

$$\frac{1}{\pi}\iint_{(\mathrm{U})}\varphi_k(z)\overline{\varphi_l(z)}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi}r^{k+l+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-l)t}\mathrm{d}t\mathrm{d}r=0, k\neq l,$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{(\mathrm{U})}|\varphi_k(z)|^2\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi}r^{2k+1}\mathrm{d}t\mathrm{d}r=\frac{1}{k+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}\right), k\neq -1,$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{(\mathrm{U})}|\varphi_k(z)|^2\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi}r^{2k+1}\mathrm{d}t\mathrm{d}r=2\ln 2, k=-1.$$

所以系统 $\varphi_k^*(z)=\left(\dfrac{1}{k+1}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k+2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}z^k(k\neq -1)\bigcup\varphi_{-1}^*(z)=(2\ln 2)^{-\frac{1}{2}}z^{-1}$ 是正交的.

如果 $f\in L_2(\mathrm{U})$, 则我们取 f 在正交系统 $\left\{\varphi_{-k}^*(z)\right\}_{k=0}^{\infty}$ 下的傅里叶级数几乎处处有

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}a_{-k}(f)\varphi_{-k}^*(z).$$

$a_{-k}(f)=\dfrac{1}{\pi}\iint_{(\mathrm{U})}f(z)\overline{\varphi_{-k}^*(z)}\mathrm{d}\sigma$ 为傅里叶系数. 令 $A(\mathrm{U})$ 是在区域 U 的解析函数的集合, 则本文考虑特殊复函数 $f\in A(\mathrm{U})$ 且洛朗展式为 $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_{-k}(f)z^{-k}$. 这里的 $c_{-k}(f)$ 是 f 的洛朗展式系数. 从而得出 $a_{-k}(f)$ 与 $c_{-k}(f)$ 的关系 $a_{-k}(f)=\left(\dfrac{1}{k+1}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k+2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}c_{-k}(f)(k\neq -1)$, $a_{-1}(f)=(2\ln 2)^{\frac{1}{2}}c_{-1}(f)$. 根据 2 者系数的关系可以得到

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}a_{-k}(f)\varphi_{-k}^*(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{-k}(f)z^{-k}, \tag{1}$$

$$\|f\|_2^2=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|c_{-k}(f)|^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2k+2}\right)}{-k+1}+2\ln 2|c_{-1}(f)|^2+|c_0(f)|^2. \tag{2}$$

对函数 f 求 r 阶导数, 则有 $f^{(r)}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_{-k}(f)(-k)(-k-1)\cdots(-k-r+1)z^{-k-r}$, 令 $b_{k,r}=(-k)(-k-1)\cdots(-k-r+1)$, 即 $f^{(r)}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{k,r}c_{-k}(f)z^{-k-r}, z^rf^{(r)}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{k,r}c_{-k}(f)z^{-k}$. 令 $S_{n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_{-k}(f)z^{-k}, c_{-k}(f)\in\mathbf{C}$, $P_{n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}d_{-k}z^{-k}, d_{-k}\in\mathbf{C}$, 则

$$E_{n-1}(f)_2=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_2:p_{n-1}\in P_{n-1}\}=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_2\}=\|f-S_{n-1}\|_2, \tag{3}$$

这里 $E_{n-1}(f)_2$ 表示用 P_{n-1} 函数来逼近 f 得到的最佳逼近. P_{n-1} 表示 z^{-1} 次数小于等于 $n-1$ 的函数全体.

定义 1 函数

$$T(\xi,\eta,h)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^*_{-k}(\xi)\overline{\varphi^*_{-k}(\eta)}(1+h)^{-k}.$$

定义 2 平移算子 F_h 的表达式为

$$F_h(f(z))=\frac{1}{\pi}\iint_{(\mathrm{U})}f(\xi)T(z,\xi,h)\,\mathrm{d}\sigma=\sum_{k=0}^{\infty}c_{-k}(f)z^{-k}(1+h)^{-k}, \tag{4}$$

则 $F_h(f(z))=\frac{1}{\pi}\iint_{(\mathrm{U})}f(\xi)T(z,\xi,h)\,\mathrm{d}\sigma$ 具有下列性质:

(1) $F_h(f_1+f_2)=F_h(f_1)+F_h(f_2)$;

(2) $F_h(\alpha f)=\alpha F_h(f)$;

(3) $\|F_h(f)\|_2\leqslant\|f\|$;

(4) $\|F_h(f)-f\|_2\to 0(h\to 0^+)$.

定义 3 函数 f 的 m 阶连续模为

$$\Omega_m(f,t)_2:=\sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2:0<h\leqslant t\right\}. \tag{5}$$

根据(1)和(4)式可得到函数 f 的一阶差分为 $\Delta_h^1 f(z)=F_h(f(z))-f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_{-k}(f)z^{-k}\left((1+h)^{-k}-1\right)$, 计算可得函数 f 的 m 阶差分为

$$\Delta_h^m f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_{-k}(f)z^{-k}\left(1-(1+h)^{-k}\right)^m.$$

在 L_2 空间的正交系统下得出函数 f 的 m 阶差分的范数为

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2^2=\sum_{k=2}^{\infty}\left[1-(1+h)^{-k}\right]^{2m}|c_{-1}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}+2\ln 2\left[1-(1+h)^{-1}\right]^{2m}|c_{-1}(f)|^2.$$

再根据(2)和(5)式得到函数 $z^rf^{(r)}$ 的 m 阶连续模为

$$\Omega_m\left(z^rf^{(r)},t\right)_2=\left(\sum_{k=2}^{\infty}\left[1-(1+t)^{-k}\right]^{2m}b_{k,r}^2|c_{-k}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}+\left[1-(1+t)^{-1}\right]^{2m}b_{1,r}^2 2\ln 2|c_{-1}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

本文中 $L_2^{(r)}:=L_2^{(r)}(\mathrm{U})(L_2:=L_2(\mathrm{U}))$, 函数 $f\in L_2^{(r)}$ 表示函数 $f\in L_2$ 且函数 $z^rf^{(r)}\in L_2$.

2 关于 Ω_m 和 $\mathcal{K}$ 泛函的 Jackson 不等式的主要结果

定理 1 对于 $n\in\mathbf{N}, r\in\mathbf{Z}_+, n>r\geqslant 1$, 有

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-1}(z^rf^{(r)})_2}=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}. \tag{7}$$

证明 根据(3)式对最佳逼近的定义知 $E_{n-1}^2(f)_2=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{4^{k-1}-1}{k-1}|c_{-k}(f)|^2$, 化简得到

$$E_{n-1}^2(f)_2\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{b_{k,r}^2}{b_{n,r}^2}\frac{4^{k-1}-1}{k-1}|c_{-k}(f)|^2=\frac{1}{b_{n,r}^2}\sum_{k=n}^{\infty}b_{k,r}^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}|c_{-k}(f)|^2=\frac{1}{b_{n,r}^2}E_{n-1}^2\left(z^rf^{(r)}\right)_2,$$

因此, 对 $f\in L_2$ 得到(7)式右边的上界

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-1}(z^rf^{(r)})_2}\leqslant\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}.$$

又因为 $f_0=z^{-n}$, 则有 $z^rf_0^{(r)}=b_{n,r}z^{-n}$, 根据(3)式对最佳逼近的定义知

$$E_{n-1}(f_0)_2=\left(\frac{4^{n-1}-1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}},E_{n-1}\left(z^rf_0^{(r)}\right)_2=\left(\frac{4^{n-1}-1}{n-1}b_{n,r}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而得到(7)式左边的下界

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-1}(z^rf^{(r)})_2}\geqslant\frac{E_{n-1}(f_0)_2}{E_{n-1}\left(z^rf_0^{(r)}\right)_2}=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}.$$

证毕.

在定理 1 成立的基础之上, 下面给出最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 与 $\Omega_m\left(z^rf^{(r)},t\right)_2$ 的精确 Jackson 不等式.

定理 2 对于 $n,m\in\mathrm{N},r\in\mathrm{Z}_+,n>r\geqslant 1,t\in(0,1)$, 则有

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(z^rf^{(r)},t)_2}=\frac{1}{[1-(1+t)^{-n}]^m\left|b_{n,r}\right|}. \tag{8}$$

证明 根据函数 $z^rf^{(r)}$ 的 m 阶连续模、(3)和(7)式得

$$\Omega_m^2\left(z^rf^{(r)},t\right)_2\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}\left[1-(1+t)^{-k}\right]^{2m}b_{k,r}^2|c_{-k}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}\geqslant[1-(1+t)^{-n}]^{2m}\sum_{k=n}^{\infty}b_{k,r}^2|c_{-k}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}=$$
$$[1-(1+t)^{-n}]^{2m}E_{n-1}^2\left(z^rf^{(r)}\right)_2\geqslant[1-(1+t)^{-n}]^{2m}b_{n,r}^2E_{n-1}^2(f)_2.$$

从而得(8)式右边的上界

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(z^rf^{(r)},t)_2}\leqslant\frac{1}{[1-(1+t)^{-n}]^m\left|b_{n,r}\right|}.$$

因为 $f_0=z^{-n}\in L_2$, 则有 $z^rf_0^{(r)}=b_{n,r}z^{-n}$, 根据(3)和(6)式知

$$E_{n-1}(f_0)_2=\left(\frac{4^{n-1}-1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}},\Omega_m\left(z^rf_0^{(r)},t\right)_2=\left(\frac{4^{n-1}-1}{n-1}b_{n,r}^2\right)^{\frac{1}{2}}[1-(1+t)^{-n}]^m,$$

从而得(8)式左边的下界

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(z^rf^{(r)},t)_2}\geqslant\frac{E_{n-1}(f_0)_2}{\Omega_m\left(z^rf_0^{(r)},t\right)_2}=\frac{1}{[1-(1+t)^{-n}]^m\left|b_{n,r}\right|}.$$

证毕.

下面得到函数 $z^rf^{(r)}$ 的 m 阶连续模在区间 $(0,h)$ 上加权积分与最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 的精确 Jackson 不

等式.

定义 4[2]　加权函数 $q(t)$ 是区间 $(0,h)$ 上实的非负可测函数, 且不恒等于 0.

定理 3　对于 $n,m\in\mathbf{N},r\in\mathbf{Z}_+,n>r\geqslant 1,h\in(0,1),0<p\leqslant 2$, $q(t)$ 是区间 $(0,h)$ 上的加权函数(见定义 4), 则

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h\Omega_m^p\left(z^rf^{(r)},t\right)_2q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}|b_{n,r}|}.\tag{9}$$

证明　闵可夫斯基不等式为

$$\left(\int_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|g_k(t)|^2\right)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_0^h|g_k(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

在 $0<p\leqslant 2,h\in\mathbf{R}^+$ 上恒成立. 令 $g_k=f_kq^{\frac{1}{p}}$, 在 $0<p\leqslant 2,h\in\mathbf{R}^+$ 上, 则有

$$\left(\int_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{\frac{p}{2}}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_0^h|f_k(t)|^pq(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\int_0^h\Omega_m^p\left(z^rf^{(r)},t\right)_2q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^h\left(\Omega_m^2\left(z^rf^{(r)},t\right)_2\right)^{\frac{p}{2}}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

再根据连续模的定义知

$$\left(\int_0^h\left(\Omega_m^2\left(z^rf^{(r)},t\right)_2\right)^{\frac{p}{2}}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\int_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left[1-(1+t)^{-k}\right]^{2m}b_{k,r}^2|c_{-k}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}\right)^{\frac{p}{2}}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由(3)和(6)式得

$$\left(\int_0^h\left(\Omega_m^2\left(z^rf^{(r)},t\right)_2\right)^{\frac{p}{2}}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant E_{n-1}\left(z^rf^{(r)}\right)_2\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

再由(7)式, 得到(9)式右边的下界

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h\Omega_m^p\left(z^rf^{(r)},t\right)_2q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}\leqslant\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}|b_{n,r}|}.$$

因为 $f_0=z^{-n}\in L_2$, 则有 $z^rf_0^{(r)}=b_{n,r}z^{-n}$, 根据(3)和(6)式得

$$E_{n-1}(f_0)_2=\left(\frac{4^{n-1}-1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\int_0^h\Omega_m^p\left(z^rf_0^{(r)},t\right)_2q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{4^{n-1}-1}{n-1}b_{n,r}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

从而得到(9)式左边的下界

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h\Omega_m^p\left(z^rf^{(r)},t\right)_2q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}\geqslant\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f_0)_2}{\left(\int_0^h\Omega_m^p\left(z^rf_0^{(r)},t\right)_2q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}=$$
$$\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}|b_{n,r}|}.$$

证毕.

推论 1　对于 $n,m\in\mathbf{N},r\in\mathbf{Z}_+,n>r\geqslant 1,t\in(0,1),p=\dfrac{1}{m}$, $q(t)$ 是区间 $(0,h)$ 上的权函数, 则

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h\Omega_m^{\frac{1}{m}}\left(z^rf^{(r)},t\right)_2q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]\,q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left|b_{n,r}\right|}. \tag{10}$$

上述得到最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 与 $\Omega_m\left(z^rf^{(r)},t\right)_2$ 的精确 Jackson 不等式. 在复数域上 $\mathcal{K}$ 泛函[1] 表达式基础上, 本文定义了 $\mathcal{K}$ 泛函.

定义 5 $\mathcal{K}$ 泛函的表达式为

$$\mathcal{K}_m(f,t^m)_2:=\mathcal{K}\left(f;t^m;L_2;L_2^{(m)}\right)=\inf\left\{\|f-g\|_2+t^m\left\|z^mg^{(m)}\right\|_2:g\in L_2^{(m)}\right\}. \tag{11}$$

这里 g 在圆盘 $\mathrm{U}=\left\{z\in\mathbf{C}:\frac{1}{2}<|z|<1\right\}$ 上且洛朗展式为 $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_{-k}z^{-k};d_{-k}\in\mathbf{C}$. 下面得到了最佳逼近 $E_{n-1}(f)_2$ 和 $\mathcal{K}$ 泛函的精确 Jackson 不等式.

定理 4 对于 $n,m\in\mathbf{N},r\in\mathbf{Z}_+,n>r+m\geqslant 1$, 则

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\mathcal{K}_m\left(z^rf^{(r)},\frac{1}{|b_{n,m}|}\right)_2}=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}. \tag{12}$$

证明 对任意的 $g\in L_2^{(m)}$ 都有 $\|g-S_{n-1}(g)\|_2=E_{n-1}(g)_2$, 根据(7)式得

$$\|g-S_{n-1}(g)\|_2\leqslant\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}E_{n-1}\left(z^mg^{(m)}\right)_2\leqslant\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\|z^mg^{(m)}\|_2,$$

$$E_{n-1}(f)_2\leqslant\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\left\{\|z^rf^{(r)}-g\|_2+\|g-S_{n-1}(g)\|_2\right\},$$

进一步有 $E_{n-1}(f)_2\leqslant\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\left\{\|z^rf^{(r)}-g\|_2+\frac{1}{|b_{n,m}|}\|z^mg^{(m)}\|_2\right\}$. 根据 $\mathcal{K}$ 泛函的定义知 $E_{n-1}(f)_2\leqslant\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\mathcal{K}_m\left(z^rf^{(r)},\frac{1}{|b_{n,m}|}\right)_2$, 从而得(12)式右边的上界

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\mathcal{K}_m\left(z^rf^{(r)},\frac{1}{|b_{n,m}|}\right)_2}\leqslant\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}.$$

令 $g=0$, 根据 $\mathcal{K}$ 泛函的定义得 $\mathcal{K}_m(f,t^m)_2\leqslant\|f\|_2$; 因为 $f_0=z^{-n}\in L_2$, 则有 $z^rf_0^{(r)}=b_{n,r}z^{-n}$. 根据(3)和(11)式得

$$E_{n-1}(f_0)_2=\left(\frac{4^{n-1}-1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathcal{K}_m\left(z^rf_0^{(r)},\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right)_2\leqslant\|z^rf_0^{(r)}\|_2=\left|b_{n,r}\right|\left(\frac{4^{n-1}-1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

从而得(12)式左边的下界

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\mathcal{K}_m\left(z^rf^{(r)},\frac{1}{|b_{n,m}|}\right)_2}\geqslant\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin P_{n-1}}}\frac{E_{n-1}(f_0)_2}{\mathcal{K}_m\left(z^rf_0^{(r)},\frac{1}{|b_{n,m}|}\right)_2}=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}.$$

证毕.

定理 5(**逆定理**) 对于 $n,m\in\mathbf{N},r\in\mathbf{Z}_+,n>r\geqslant 1,t\in(0,1)$, 有

$$\Omega_m^2\left(z^rf^{(r)},t\right)_2\leqslant 2m\left(\frac{2t}{1+t}\right)^{2m}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1+t}{t}\right]}k^{2m-1}E_{k-1}^2\left(z^rf^{(r)}\right)_2. \tag{13}$$

证明　令 $N=\left[\frac{1+t}{t}\right]$, 则有 $N\leqslant\frac{1+t}{t}<2N\Rightarrow\frac{t}{t+1}\leqslant\frac{1}{N}<\frac{2t}{t+1}$. 由连续模的定义知

$$\Omega_m^2\left(z^rf^{(r)},t\right)_2=\sum_{k=2}^{\infty}\left[1-(1+t)^{-k}\right]^{2m}b_{k,r}^2|c_{-k}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}+\left[1-(1+t)^{-1}\right]^{2m}b_{1,r}^2 2\ln2|c_{-1}(f)|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{N^{2m}}\left(\sum_{k=2}^{N}k^{2m}b_{k,r}^2|c_{-k}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}+b_{1,r}^2 2\ln2|c_{-1}(f)|^2\right)+\sum_{k=N+1}^{\infty}b_{k,r}^2|c_{-k}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}=$$

$$\frac{1}{N^{2m}}\left(\sum_{k=2}^{N}\left(k^{2m}-(k-1)^{2m}\right)\sum_{l=k}^{\infty}b_{l,r}^2|c_{-l}(f)|^2\frac{4^{l-1}-1}{l-1}+b_{1,r}^2 2\ln2|c_{-1}(f)|^2\right)\leqslant$$

$$\frac{1}{N^{2m}}\left(2m\sum_{k=2}^{N}k^{2m}\sum_{l=k}^{\infty}b_{l,r}^2|c_{-l}(f)|^2\frac{4^{l-1}-1}{l-1}+b_{1,r}^2 2\ln2|c_{-1}(f)|^2\right)\leqslant$$

$$\frac{1}{N^{2m}}\left(2m\sum_{k=2}^{N}k^{2m}\sum_{l=k}^{\infty}b_{l,r}^2|c_{-l}(f)|^2\frac{4^{l-1}-1}{l-1}+E_0^2\left(z^rf^{(r)}\right)_2\right)\leqslant$$

$$2m\left(\frac{2t}{1+t}\right)^{2m}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1+t}{t}\right]}k^{2m-1}E_{k-1}^2\left(z^rf^{(r)}\right)_2.$$

证毕.

3　函数类的最佳逼近

定义 6　函数 Φ 定义在 $\mathbf{R}_+$ 上单调递增的实函数, 且满足 $\Phi(0)=0$ 和 $\Phi(t)\to0(t\to0)$.

定义 7　3 种函数类:

$$W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi):=\left\{f\in L_2^{(r)};\Omega_m\left(z^rf^{(r)},t\right)_2\leqslant\Phi(t),t\in(0,1),r\in\mathbf{Z}_+,m\in\mathbf{N}\right\};$$

$$W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q):=\left\{f\in L_2^{(r)};\int_0^h\Omega_m^p\left(z^rf^{(r)},t\right)_2q(t)\,\mathrm{d}t\leqslant1,t\in(0,h),h\in(0,1),r\in\mathbf{Z}_+,m\in\mathbf{N};0<p\leqslant2\right\};$$

$$W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi):=\left\{f\in L_2^{(r)};\mathcal{K}_m\left(z^rf^{(r)},t^m\right)_2\leqslant\Phi(t^m),t\in(0,1),r\in\mathbf{Z}_+,m\in\mathbf{N}\right\};$$

Φ 被称为函数类 $W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$, $W_2^{(r)}(E,\Phi)$ 和 $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)$ 上的限制函数.

定义 8[5]　$M^{(r)}$ 表示 $L_2^{(r)}$ 的子类, 函数类 $M^{(r)}$ 的最佳逼近表达式为

$$E_{n-1}\left(M^{(r)}\right)_2:=\sup\left\{E_{n-1}(f)_2:f\in M^{(r)}\right\}.\tag{14}$$

定理 6　对于 $n,m\in\mathbf{N},r\in\mathbf{Z}_+,n>r\geqslant1,t\in(0,1)$, Φ 是函数类 $W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$ 上的限制函数(见定义 6, 7), 则

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\right)_2=\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}.\tag{15}$$

证明　由(8)式知, 对任意的 $f\in W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$, 有

$$E_{n-1}(f)_2\leqslant\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{\Omega_m\left(z^rf^{(r)},t\right)_2}{[1-(1+t)^{-n}]^m},$$

再由(14)式, 得到(15)式右边的上界

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\right)_2\leqslant\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}.$$

令 $f_0(z)=\left(\frac{n-1}{4^{n-1}-1}\frac{1}{b_{n,r}^2}\right)^{\frac12}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}z^{-n}\in L_2^{(r)}$, 根据(3)和(6)式得

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}, \Omega_m\left(z^r f_0^{(r)}, t\right)_2 \leqslant \Phi(t),$$

从而有 $f_0(z) \in W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$, 因此得到(15)式左边的下界

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\right)_2 \geqslant E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}.$$

证毕.

定理 7 对于 $n, m \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{Z}_+, n > r \geqslant 1, 0 < p \leqslant 2, h \in (0,1)$, $q(t)$ 是定义在区间 $(0,h)$ 上的加权函数(见定义 4), 有

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m, h, q)\right)_2 = \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{1}{\left(\int_0^h [1-(1+t)^{-n}]^{pm} q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{16}$$

证明 由(9)式知, 对任意的 $f \in W_2^{(r)}(\Omega_m, h, q)$, 有

$$E_{n-1}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{1}{\left(\int_0^h [1-(1+t)^{-n}]^{pm} q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}},$$

再由(14)式, 得到(16)式右边的上界

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m, h, q)\right)_2 \leqslant \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{1}{\left(\int_0^h [1-(1+t)^{-n}]^{pm} q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

令 $f_0(z) = \left(\frac{n-1}{4^{n-1}-1}\frac{1}{b_{n,r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\int_0^h [1-(1+t)^{-n}]^{pm} q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}} z^{-n} \in L_2^{(r)}$, 根据(3)和(6)式得

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{1}{\left(\int_0^h [1-(1+t)^{-n}]^{pm} q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}},$$

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p\left(z^r f_0^{(r)}, t\right)_2 q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

从而有 $f_0(z) \in W_2^{(r)}(\Omega_m, h, q)$, 得(16)式左边的下界

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m, h, q)\right)_2 \geqslant E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{1}{\left(\int_0^h [1-(1+t)^{-n}]^{pm} q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

证毕.

定理 8 对于 $n, m \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{Z}_+, n > r + m \geqslant 1, t \in \left(|b_{n.m}|^{-\frac{1}{m}}, 1\right)$, Φ 是函数类 $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ 上的限制函数(见定义 6, 7), 有

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)\right)_2 = \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\Phi\left(\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right). \tag{17}$$

证明 由(12)式知, 对任意的 $f \in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, 有

$$E_{n-1}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\Phi\left(\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right),$$

再由(14)式, 得(17)式右边的上界

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)\right)_2 \leqslant \frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\Phi\left(\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right).$$

令 $f_0(z)=\left(\frac{n-1}{4^{n-1}-1}\frac{1}{b_{n,r}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Phi\left(\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right)z^{-n}\in L_2^{(r)}$, 根据(3)式得 $E_{n-1}(f_0)_2=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\Phi\left(\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right)$; 当 $g=0$, $\mathcal{K}(f,t^m)_2=\|f\|_2$. 把函数 $z^r f_0^{(r)}$ 带入 $\mathcal{K}$ 泛函里得

$$\mathcal{K}_m\left(z^r f_0^{(r)},t^m\right)_2 \leqslant \|z^r f_0^{(r)}\|_2=\Phi\left(\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right),$$

因为 $t\in\left(|b_{n.m}|^{-\frac{1}{m}},1\right)$, 所以

$$\mathcal{K}_m\left(z^r f_0^{(r)},t^m\right)_2 \leqslant \|z^r f_0^{(r)}\|_2=\Phi\left(\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right)\leqslant\Phi(t^m),$$

从而有 $f_0(z)\in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)$. 得(17)式左边的下界

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)\right)_2 \geqslant E_{n-1}(f_0)_2=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\Phi\left(\frac{1}{\left|b_{n,m}\right|}\right).$$

证毕.

4 关于函数类宽度的求解

定义 9[3] B 是在 L_2 空间下的单位球, 假设 $\Lambda_n\subset L_2$ 是 n 维子空间; $\Lambda^n\subset L_2$ 是 n 维余子空间; $\sigma:L_2\to\Lambda_n$ 是线性连续算子, $\sigma^{\perp}:\Lambda_n\to L_2$ 是线性连续算子, M 是 L_2 下的凸对称子集, 定义:

$$b_n(M,L_2)=\sup\{\sup(\varepsilon;\varepsilon B\cap\Lambda_{n+1}\subset M):\Lambda_{n+1}\subset L_2\};$$

$$d_n(M,L_2)=\inf\{\sup\{\inf\{\|f-g\|_2:g\in\Lambda_n\}:f\in M\}:\Lambda_n\subset L_2\};$$

$$\delta_n(M,L_2)=\inf\{\inf\{\sup\{\|f-\sigma f\|_2:f\in M\}:\sigma L_2\in\Lambda_2\}:\Lambda_n\subset L_2\};$$

$$d^n(M,L_2)=\inf\{\sup\{\|f\|_2:f\in M\cap\Lambda^n\}:\Lambda^n\subset L_2\};$$

$$\Pi_n(M,L_2)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\left\|f-\sigma^{\perp}f\right\|_2:f\in M\right\}:\sigma^{\perp}L_2\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset L_2\right\}.$$

在希尔伯特空间中有

$$b_n(M,L_2)\leqslant d^n(M,L_2)\leqslant d_n(M,L_2)=\delta_n(M,L_2)=\Pi_n(M,L_2). \tag{18}$$

定理 9 对于 $n,m\in\mathbf{N},r\in\mathbf{Z}_+,n>r\geqslant 1,t\in(0,1)$, Φ 是函数类 $W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$ 上的限制函数(见定义 6, 7), 有

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\right)=E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\right)_2=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}, \tag{19}$$

这里的 $\lambda_n(\cdot)$ 表示 $b_n(M,L_2),d^n(M,L_2),d_n(M,L_2),\delta_n(M,L_2),\Pi_n(M,L_2)$ 中任意一种宽度.

证明 由(15)式知, $E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\right)_2=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}$. 再根据 n 维宽度的定义和(18)式, 得(19)式右边的上界

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi),L_2\right)\leqslant E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\right)_2=\frac{1}{\left|b_{n,r}\right|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}.$$

令 $n+1$ 维函数为 $Q_{n+1}=\left\{p_n\in P_n:p_n=\sum_{k=0}^{n}a_k z^{-k};a_k\in\mathbf{C}\right\}$, 这里 $n+1$ 维球体是

$$B_{n+1}=\left\{p_n\in Q_{n+1}:\|p_n\|_2\leqslant\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}\right\},$$

$$\Omega_m^2\left(z^r p_n^{(r)},t\right)_2=\sum_{k=2}^{\infty}\left[1-(1+t)^{-k}\right]^{2m}b_{k,r}^2|c_{-k}(f)|^2\frac{4^{k-1}-1}{k-1}|a_k|^2+\left[1-(1+t)^{-1}\right]^{2m}b_{1,r}^2 2\ln 2|c_{-1}(f)|^2|a_1|^2.$$

化简得 $\Omega_m^2\left(z^r p_n^{(r)},t\right)_2\leqslant[1-(1+t)^{-n}]^{2m}b_{\mathrm{n},r}^2\|p_n\|_2^2\leqslant\Phi^2(t)$, 从而有 $B_{n+1}\subset W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$. 再根据(18)式, 得(19)式左边的下界

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi),L_2\right)\geqslant b_n\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,\Phi),L_2\right)\geqslant b_n(B_{n+1},L_2)\geqslant\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{\Phi(t)}{[1-(1+t)^{-n}]^m}.$$

证毕.

定理 10 对于 $n,m\in\mathbf{N},r\in\mathbf{Z}_+,n>r\geqslant1,0<p\leqslant2,h\in(0,1)$, $q(t)$ 是区间 $(0,h)$ 上的加权函数, 有

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q),L_2\right)=E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q)\right)_2=\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}.\tag{20}$$

这里的 $\lambda_n(\cdot)$ 表示 $b_n(M,L_2),d^n(M,L_2),d_n(M,L_2),\delta_n(M,L_2),\Pi_n(M,L_2)$ 中任意一种宽度.

证明 由(16)式知

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q)\right)_2=\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}};$$

再根据 n 维宽度的定义和(18)式, 得(20)式右边的上界

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q),L_2\right)\leqslant E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q)\right)_2=\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

令 $n+1$ 维球体为

$$B_{n+1}=\left\{p_n\in Q_{n+1}:\|p_n\|_2\leqslant\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}\right\},$$

这里 Q_{n+1} 为定理 9 证明过程中的 Q_{n+1}. 由连续模的定义知 $\int_0^h\Omega_m^p\left(z^r p_n^{(r)},t\right)_2 q(t)\,\mathrm{d}t\leqslant1$, 则 $B_{n+1}\subset W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q)$, 再根据(18)式, 得(20)式左边的下界

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q),L_2\right)\geqslant b_n\left(W_2^{(r)}(\Omega_m,h,q),L_2\right)\geqslant b_n(B_{n+1},L_2)\geqslant\frac{1}{|b_{n,r}|}\frac{1}{\left(\int_0^h[1-(1+t)^{-n}]^{pm}q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

证毕.

定理 11 对于 $n,m\in\mathbf{N},r\in\mathbf{Z}_+,n>r+m\geqslant1,t\in\left(|b_{n.m}|^{-\frac{1}{m}},1\right)$, Φ 是函数类 $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)$ 上的限制函数(见定义 6, 7), 有

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi),L_2\right)=E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)\right)_2=\frac{1}{|b_{n,r}|}\Phi\left(\frac{1}{|b_{n,m}|}\right).\tag{21}$$

这里的 $\lambda_n(\cdot)$ 表示 $b_n(M,L_2),d^n(M,L_2),d_n(M,L_2),\delta_n(M,L_2),\Pi_n(M,L_2)$ 中任意一种宽度.

证明 根据(17)式知 $E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)\right)_2=\frac{1}{|b_{n,r}|}\Phi\left(\frac{1}{|b_{n,m}|}\right)$. 再根据 n 维宽度的定义和(18)式, 得(21)式

右边的上界

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi),L_2\right)\leqslant E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)\right)_2=\frac{1}{|b_{n,r}|}\Phi\left(\frac{1}{|b_{n,m}|}\right).$$

令 $n+1$ 维球体为

$$B_{n+1}=\left\{p_n\in Q_{n+1}:\|p_n\|_2\leqslant\frac{1}{|b_{n,r}|}\Phi\left(\frac{1}{|b_{n,m}|}\right)\right\},$$

这里 Q_{n+1} 为定理 9 证明过程中的 Q_{n+1}. 根据 $\mathcal{K}$ 泛函的定义知, 当 $g=0$ 时, $\mathcal{K}(f,t^m)_2\leqslant\|f\|_2$. 把函数 $z^rp_n^{(r)}$ 带入 $\mathcal{K}$ 泛函里得

$$\mathcal{K}_m\left(z^rp_n^{(r)},t^m\right)_2\leqslant\left\|z^rp_n^{(r)}\right\|_2=\Phi\left(\frac{1}{|b_{n,m}|}\right),$$

又因为 $t\in\left(|b_{n,m}|^{-\frac{1}{m}},1\right)$, 所以 $\mathcal{K}_m\left(z^rp_n^{(r)},t^m\right)_2\leqslant\|z^rp_n^{(r)}\|_2=\Phi\left(\frac{1}{|b_{n,m}|}\right)\leqslant\Phi(t^m)$, 从而有 $B_{n+1}\in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi)$, 得(21)式左边的下界

$$\lambda_n\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi),L_2\right)\geqslant b_n\left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m,\Phi),L_2\right)\geqslant b_n(B_{n+1},L_2)\geqslant\frac{1}{|b_{n,r}|}\Phi\left(\frac{1}{|b_{n,m}|}\right).$$

证毕.

5　总结

本文在复数域上研究了 $L_2(\mathrm{U})$, $\mathrm{U}=\left\{z\in\mathbf{C}:\frac{1}{2}<|z|<1\right\}$ 上的一类特殊函数空间, 要求函数 f 解析, 原点为其本性奇点, 且有 $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_{-k}(f)z^{-k}$ 的洛朗展式. 我们给出此空间上精确的逼近正定理、逆定理及一些宽度的估计. 在此基础上, 我们下一步将研究形如 $f=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)z^k$ 洛朗展式的函数空间相应的逼近问题.

致谢: 感谢审稿人给予的宝贵意见. 通信作者感谢国家留学基金委员会给予的资助.

参考文献:

[1] Saidusaynov M S. K-functionals and exact values of n-widths in the Bergman space[J]. Journal of Tajik National University:ural mathematical, 2017, 3(2): 74-81. DOI: 10.15826/umj.2017.2.010.

[2] Shabozov M Sh. Khuromonov Kh M. On the best approximation in the mean of functions of a complex variable by Fourier series in the Bergman space[J]. Russian Mathematics, 2020, 64(5): 66-83. DOI: 10.3103/S1066369X20020073.

[3] Shabozov M S, Saidusaynov M S. Upper bounds for the approximation of certain classes of functions of a complex variable by Fourier series in the space L_2 and n-Widths[J]. Mathematical Notes, 2018, 103(3/4): 656. DOI: 10.1134/S0001434618030343.

[4] Abilov V A, Abilova F V, Kerimov M K. Sharp estimates for the convergence rate of Fourier series of complex variable functions in $L_2(D,p(z))$[J]. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010, 50(6): 946-950. DOI: 10.1134/S0965542510060023.

[5] Shabozov M S, Saidusaynov M S. Approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems in L_2[J]. Russian Mathematics, 2020, 64(6): 56-62. DOI: 10.3103/S1066369X20060080.

[6] Vakarchuk S B. K-functionals and exact values of n-widths for several classes from L_2[J]. Mathematical Notes, 1999, 66(4): 404-408. DOI: 10.1007/BF02679087.

[7] Vakarchuk S B. Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev-Hermite weight and widths of function classes[J]. Mathematical Notes, 2014, 95(5-6): 599-614. DOI: 10.1134/S0001434614050046.

[8] Vinogradov O L, Zhuk V V. The rate of decrease of constants in Jackson type inequalities in dependence of the order of the

continuity modulus[J]. Journal of Mathematical ences, 2011, 178(2): 132-143. DOI: 10.1007/s10958-011-0532-2.

[9] Babenko V F, Konareva S V. Jackson–Stechkin-Type inequalities for the approximation of elements of Hilbert spaces[J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2019, 70(9): 1 155-1 165. DOI: 10.1007/s11253-019-01573-3.

[10] Esmaganbetov M G. Exact Jackson-Stechkin inequalities and diameters of classes of functions from $L_2\left(\mathbf{R}^2, \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right)$[J]. Russian Mathematics, 2007, 51(2): 1-7. DOI: 10.3103/S1066369X07020016.

[11] Trigub R M. Approximation of smooth functions and constants by polynomials with integer and natural coefficients[J]. Mathematical Notes, 2001, 70(1): 110-122. DOI: 10.1023/A:1010282120209.

[12] 杨智纯, 魏舟. 关于向量值函数 Riemann 积分的若干研究 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2019, 41(5): 876-883. DOI: 10.7540/j.ynu.20180624.

Yang Z C, Wei Z. On Riemann integration of vector-valued functions[J]. Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition, 2019, 41(5): 876-883.

[13] 支元洪, 何青海. 基于实值函数极限理论的无穷大符号讨论 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2019, 41(6): 1 090-1 100. DOI: 10.7540/j.ynu.20190419.

Zhi Y H, He Q H. The sign of infinity based on the theory of limit of real-valued functions[J]. Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition, 2019, 41(6): 1 090-1 100.

[14] 孙永生. 关于 Jackson 不等式 [J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 1981, 17(1): 1-6.

Sun Y S. On Jackson inequality[J]. Journal of Beijing Normal University: Natural Sciences Edition, 1981, 17(1): 1-6.

The Fourier series approximation of complex functions in L_2

YANG Gang，GU Yi[**]

(School of Mathematics and Statistic, Yunnan University, Kunming 650500, Yunnan, China)

Abstract: We consider the approximation of a special class of complex functions f that is analytic on the disk $\mathrm{U}=\left\{z\in\mathrm{C}:\frac{1}{2}<|z|<1\right\}$, whose origin is its essential singularity. We obtain the exact Jackson inequality between the best approximation $E_{n-1}(f)_2$ of functions f and m-order continuous modules of functions $z^r f^{(r)}$. We also obtain the exact Jackson inequality between the best approximation $E_{n-1}(f)_2$ of function f and $\mathcal{K}$-functional. Then we obtain the exact Jackson inequality between the best approximation $E_{n-1}(f)_2$ of functions f and weighted integral of m-order continuous modules of functions $z^r f^{(r)}$. Finally, we obtain the best approximation and n-widths in the functions classes of m-order continuous modules of functions $z^r f^{(r)}$, in the functions classes of weighted integral of m-order continuous modules of functions $z^r f^{(r)}$ and in the functions classes of $\mathcal{K}$-functional respectively.

Key words: best approximation; m-order modules of continuouing; $\mathcal{K}$-functional; n-widths