

具有脉冲收获的非自治 Gilpin-Ayala

模型的最大收获量问题*

吴艳梅, 窦家维, 马 丽

(陕西师范大学 数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062)

摘要: 研究了一类由非自治 Gilpin-Ayala 脉冲收获系统描述的种群优化控制问题. 在脉冲收获时刻预先给定的前提下, 选择各时刻的收获努力量作为控制变量, 以给定时间周期内种群收获量最大为目标研究其最优收获策略. 首先应用脉冲微分系统的极值原理获得了奇异收获策略以及相应的奇异路径. 进一步研究了当奇异收获策略所需要的条件不满足时(称为受阻情形)的优化控制问题. 为此首先建立了优化准则, 即最优路径应该与奇异路径尽可能接近. 并以优化准则为基础研究获得了一些受阻情形下的最优收获策略. 该文的结果推广改进了已有文献中关于脉冲控制收获问题的一些相关结论.

关键词: 非自治 Gilpin-Ayala 模型; 脉冲收获; 极值原理; 受阻情形; 最优收获策略

中图分类号: O 175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0258-7971(2017)03-0340-10

在关于种群生态系统的研究中, 近年来很多学者对具有脉冲收获系统的优化控制问题进行研究并获得了重要成果. 描述种群增长的脉冲收获控制系统常见的有 logistic 模型, Gompertz 模型等^[1-10]. 文献[1-8]研究了由 logistic 模型描述的具有脉冲收获的种群系统的优化控制问题, 文献[9-10]讨论了由 Gompertz 模型描述的种群脉冲收获控制问题. Gilpin-Ayala 模型作为 logistic 模型的推广, 利用它能广泛地描述密度制约因素对种群生长的影响, 因此能更实际地刻画种群系统的生长规律. 文献[11]研究了一类自治 Gilpin-Ayala 模型的最优连续收获问题, 文献[12]利用脉冲微分系统的极值原理对具有脉冲收获的周期 Gilpin-Ayala 模型的优化控制问题进行了研究. 目前所研究的脉冲优化收获问题大部分都以最大持续产量或周末的最大储量为管理目标. 本文研究一类由 Gilpin-Ayala 模型描述的具有脉冲收获的种群系统在给定时间周期内的最大收获量问题. 首先应用脉冲微分系统的极值原理求得控制问题的奇异控制, 并进一步研究在奇异控制受阻情形下的优化收获策略.

本文所考虑的种群收获模型由下面脉冲微分系统描述:

$$\begin{cases} N'(t) = r(t)N(t) - m(t)N^{\theta+1}(t), & t \neq t_k, \\ N(t_k^+) = (1 - E_k)N(t_k), & t = t_k, \\ N(t_0) = N_0 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

系统(1)中, $N(t)$ 为 t 时刻种群的数量, $r(t) > 0, m(t) > 0$ 是给定区间 $[t_0, T]$ 上的连续函数, $r(t)$ 表示种群的内在增长率, θ 为正常数, $m(t)N^{\theta+1}(t)$ 表达了种群的密度制约因素. T 为一个正常数, $t_k (k \in I = \{0, 1, \dots, n\})$ 为收获时刻, 满足 $t_0 < t_1 < \dots < t_n < T = t_{n+1}$. 对于 $k \in I, E_k$ 表示在 t_k 时刻对种群的收获努力量.

首先给出下面关于系统(1)解的存在唯一性定理.

* 收稿日期: 2016-01-09

基金项目: 国家自然科学基金(11171199).

作者简介: 吴艳梅(1991-), 女, 山西人, 硕士生, 主要从事脉冲微分方程方面的研究. E-mail: wuyanmei@snnu.edu.cn.

通信作者: 窦家维(1963-), 女, 陕西人, 博士, 副教授, 主要从事脉冲微分方程方面的研究. E-mail: jiawei@snnu.edu.cn.

定理 1 对于每一个 $k \in I$, 如果 E_k 满足 $0 \leq E_k \leq 1$, 则系统(1) 在 $[t_0, \infty)$ 上存在唯一解 $N = N(t) \geq 0$.

证明 (i) 若对于每一个 $k \in I$, 满足 $0 \leq E_k < 1$, 作变量替换, 令 $x(t) = N^{-\theta}(t)$, 则系统(1) 变为:

$$\begin{cases} x'(t) = -\theta r(t)x(t) + \theta m(t), & t \neq t_k, \\ x(t_k^+) = (1 - E_k)^{-\theta} x(t_k), & t = t_k, \\ x(t_0) = x_0 = N_0^{-\theta}. \end{cases} \quad (2)$$

直接求解系统(2), 可得到

$$x(t) = x_0 \prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 - E_k)^{-\theta} \exp\left\{-\theta \int_0^t r(s) ds\right\} + \theta \int_{t_0}^t \prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 - E_k)^{-\theta} \exp\left\{-\theta \int_0^t r(\sigma) d\sigma\right\} m(s) ds. \quad (3)$$

将 $N(t) = x^{-\frac{1}{\theta}}(t)$ 代入(3) 式中即可得到系统(1) 的唯一解:

$$N(t) = \left[N_0^{-\frac{1}{\theta}} \prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 - E_k)^{-\theta} \exp\left\{-\theta \int_0^t r(s) ds\right\} + \theta \int_{t_0}^t \prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 - E_k)^{-\theta} \exp\left\{-\theta \int_0^t r(\sigma) d\sigma\right\} m(s) ds \right]^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (4)$$

(ii) 若存在某个 $u \in I$, 使得 $E_u = 1$, 即 $N(t_u^+) = 1$, 则当 $t \in [t_0, t_u]$ 时, 系统(1) 的解的表达式仍由(4) 式给出. 而当 $t_u < t \leq T$ 时, $N(t) = 0$.

因此, 定理的结论成立. 证毕.

本文中选取收获努力量 $E = (E_0, E_1, \dots, E_n)$ 作为控制变量, 定义允许集为:

$$D = \{(E_0, E_1, \dots, E_n) \mid 0 \leq E_k \leq 1, k = 0, 1, \dots, n\}, \quad (5)$$

并定义性能指标函数为在给定区间 $[t_0, T]$ 内对种群的总收获量:

$$J(E) = \sum_{k=0}^n E_k N(t_k) + N(T), \quad (6)$$

其中 $E_k N(t_k)$ 表示 $t_k (k \in I)$ 时刻对种群的收获量, $N(T)$ 表示利用 $E = (E_0, E_1, \dots, E_n)$ 进行收获时在 T 时刻的种群量.

本文将研究获得最大总收获量的优化控制问题. 如果存在 $E^* \in D$, 使得

$$J(E^*) = \max_{E \in D} J(E), \quad (7)$$

则称 E^* 为优化问题的最优控制策略, 并记 $N^*(t)$ 为在该策略下所对应的解曲线.

1 奇异控制策略

由于控制问题(1), (5), (6) 是一个脉冲优化控制问题. 本节首先应用文献[13] 中给出的脉冲微分系统的极值原理确定优化控制问题应该满足的必要条件.

根据文献[13] 中的记号, 令

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, g_0 = E_k N(t_k), \\ f_1 &= r(t)N(t) - m(t)N^{\theta+1}(t), g_1 = -E_k N(t_k). \end{aligned}$$

如果以 H 表示连续 Hamilton 函数, H_k 表示脉冲 Hamilton 函数, 则有:

$$\begin{aligned} H(\lambda, N) &= \lambda [r(t)N(t) - m(t)N^{\theta+1}(t)], \\ H_k(\lambda, N, E_k) &= (1 - \lambda(t_k^+))E_k N(t_k), \end{aligned}$$

其中 $\lambda = \lambda(t)$ 为协态变量.

由极值原理(文献[13], 定理 1.2) 可知, 如果 $E^* = (E_0^*, E_1^*, \dots, E_n^*) \in D$ 是优化控制问题(1), (5), (6) 的最优控制策略, $N^*(t)$ 是对应于该优化收获策略下系统(1) 的解曲线, 则一定存在协态变量 $\lambda = \lambda(t)$ 满足下面的协态方程:

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -\lambda r(t) + \lambda(\theta + 1)m(t)(N^*(t))^{\theta}, & t \neq t_k, \\ \lambda(t_k) = \lambda(t_k^+) + (1 - \lambda(t_k^+))E_k^*, & t = t_k, \\ \lambda(T) = 1, \end{cases} \quad (8)$$

使得

$$\max_{E \in D} H_k(N^*(t_k), E) = H_k(N^*(t_k), E^*).$$

为了求得优化控制,令 $\frac{\partial H_k}{\partial E_k^*} = 0$,并结合状态方程(1)和协态系统(8),可得到控制变量 E 应满足的条件.

首先由 $\frac{\partial H_k}{\partial E_k^*} = 0$ 得到:

$$\lambda(t_k^+) = 1, \quad (9)$$

进一步由(9)式及(8)的第2式得到

$$\lambda(t_k) = 1.$$

对(8)的第1式在区间 $(t_k, t_{k+1}]$ 上进行积分,得到

$$\lambda(t_{k+1}) = \lambda(t_k^+) \exp\left\{-\int_{t_k}^{t_{k+1}} [r(t) - (\theta + 1)m(t)(N^*(t))^\theta] dt\right\}, \quad (10)$$

结合(8)~(10)式可得下式成立:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} [r(t) - (\theta + 1)m(t)(N^*(t))^\theta] dt = 0. \quad (11)$$

进一步对系统(1)的第1式在区间 $(t_k, t_{k+1}]$ 上进行积分得到:

$$N^*(t_{k+1}) = \frac{N^*(t_k^+)}{D_k^{\frac{1}{\theta}} \exp\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} m(t)(N^*(t))^\theta dt\right\}}, \quad (12)$$

在(4)式中,令 $t = t_k$,并进行化简得到

$$N^*(t_{k+1}) = \frac{N^*(t_k^+)}{[D_k + B_k(N^*(t_k^+))^\theta]^{\frac{1}{\theta}}}, \quad (13)$$

其中

$$D_k = \exp\left\{-\theta \int_{t_k}^{t_{k+1}} r(t) dt\right\}, B_k = \theta \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp\left\{-\theta \int_s^{t_{k+1}} r(\sigma) d\sigma\right\} m(s) ds.$$

又因为

$$D_k + B_k(N^*(t_k^+))^\theta = \left(D_k^{\frac{1}{\theta}} \exp\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} m(t)(N^*(t))^\theta dt\right\}\right)^\theta = \exp\left\{-\frac{\theta}{\theta + 1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \theta r(t) + [r(t) - (\theta + 1)m(t)(N^*(t))^\theta] dt\right\}, \quad (14)$$

将(11)式代入(14)式中,即有

$$D_k + B_k(N^*(t_k^+))^\theta = D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}},$$

由上式即可求得 $N^*(t_k^+)$ 的具体表达为:

$$N^*(t_k^+) = \left(\frac{D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_k}{B_k}\right)^{\frac{1}{\theta}}, k \in I. \quad (15)$$

为表述简便,下文中简记 $N_k^* = N^*(t_k^+)$.如果以 h_k^* 记 t_k 时刻种群的收获量,则得到:

$$h_0^* = N(t_0) - N_0^* = N_0 - \left(\frac{D_0^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_0}{B_0}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$h_k^* = E_k^* N^*(t_k) = N^*(t_k) - N_k^* = \left(\frac{1 - D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}}}{B_{k-1}}\right)^{\frac{1}{\theta}} - \left(\frac{D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_k}{B_k}\right)^{\frac{1}{\theta}}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

由(15)式可知

$$N_k^* = \left(\frac{D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_k}{B_k} \right)^{\frac{1}{\theta}} > 0, k \in I. \quad (17)$$

进一步可求得

$$E_0^* = \frac{h_0^*}{N_0} = 1 - \left(\frac{D_0^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_0}{B_0} \right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{1}{N_0},$$

$$E_k^* = \frac{h_k^*}{N^*(t_k)} = 1 - \left(\frac{B_{k-1}}{B_k} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_k}{1 - D_{k-1}^{\frac{\theta}{\theta+1}}} \right)^{\frac{1}{\theta}}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

由(17)式可知 $E^* < 1$ 满足,因此要使策略 $E^* \in D$,当且仅当下面条件成立:

$$\left(\frac{D_0^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_0}{B_0} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq N_0,$$

$$\left(\frac{B_{k-1}}{B_k} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_k}{1 - D_{k-1}^{\frac{\theta}{\theta+1}}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1, k = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

由(18)式所确定的收获策略称为奇异收获策略,将(17)式所确定的种群量称为奇异种群水平.

我们可证明下面结果.

定理 2 如果(19)式成立,则优化控制问题(1),(5),(6)的最优控制策略为 $E^* = (E_0^*, E_1^*, \dots, E_n^*)$,其中 E_k^* 由(18)式给出,优化路径 $N_k^* (k \in I)$ 由(17)式给出,且在 $[t_0, T]$ 内的最大收获量为:

$$J(E^*) = \sum_{k=0}^n E_k^* N^*(t_k) + N(T) = N_0 - \left(\frac{D_0^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_0}{B_0} \right)^{\frac{1}{\theta}} +$$

$$\sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1 - D_{k-1}^{\frac{\theta}{\theta+1}}}{B_{k-1}} \right)^{\frac{1}{\theta}} - \left(\frac{D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_k}{B_k} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] + \left(\frac{1 - D_n^{\frac{\theta}{\theta+1}}}{B_n} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \quad (20)$$

证明 (i) 首先,由于脉冲微分系统(1)的解 $N(t)$ 连续依赖于收获努力量 $E = (E_0, E_1, \dots, E_n)$,因而总收获量 $J(E)$ 也连续依赖于 $E_k (k \in I)$,又因为允许集 D 是一个有界闭集,因此优化控制策略一定存在.即存在 $E^* \in D$ 使得

$$J(E^*) = \max_{E \in D} J(E).$$

其次,由于脉冲微分系统的极值原理给出了优化控制策略应满足的必要条件^[13],而前面应用极值原理所获得的奇异策略又是唯一满足该必要条件的控制策略.因此优化控制问题(1),(5),(6)的最优控制策略为 $E^* = (E_0^*, E_1^*, \dots, E_n^*)$,其中 E_k^* 由(18)式给出,优化路径 $N_k^* (k \in I)$ 由(17)式给出.

(ii) 将(15)式代入(13)式,即有

$$N^*(t_{k+1}) = (1 - D_k^{\frac{1}{\theta+1}})^{\frac{1}{\theta}} B_k^{-\frac{1}{\theta}}, k \in I,$$

从而 $N^*(T) = (1 - D_n^{\frac{1}{\theta+1}})^{\frac{1}{\theta}} B_n^{-\frac{1}{\theta}}$.将 $E_k^*, N^*(t_k)$ 以及 $N^*(T)$ 代入 $J(E^*)$ 即可得到(20)式.证毕.

2 受阻情形下的优化控制策略

由上面讨论可知,当条件(19)都满足时,优化控制策略由定理 2 给出.如果种群初使数量较少或种群增长率较低,条件(19)不一定能保证都成立.当(19)中有条件不满足时,优化控制策略又当如何确定呢?就当前所知,关于这类问题目前还未见到有关研究结果.目前所见到的大多数文献,均是考虑当与条件(19)相类似的条件成立时的优化控制策略^[3,14-16].下面将研究当(19)中有条件不满足时的优化控制策略,本文称此情形为受阻情形下的优化控制问题.

为了下面研究方便,将脉冲收获系统(1)改写成下面形式:

$$\begin{cases} N'(t) = r(t)N(t) - m(t)N^{\theta+1}(t), & t \neq t_k, \\ N(t_k^+) = N(t_k) - h_k, & t = t_k, \\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \quad (21)$$

在系统(21)中, $h_k = E_k N(t_k)$ 表示在 t_k 时刻的收获量. 通过选择 $h = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ 作为控制变量, 目的是在下面限制条件之下:

$$h_k \geq 0, N(t_k^+) \geq 0, k \in I = \{0, 1, \dots, n\}, \quad (22)$$

使得目标泛函

$$J(h) = \sum_{k=0}^n h_k + N(T) \quad (23)$$

取到最大值.

为简便起见, 记系统(21) ~ (23) 所描述的收获问题为 $HP[t_0, t_1, \dots, t_n, T]$.

2.1 初始受阻情形 如果种群初始数量较少, 使得由(16)式所确定的 $h_0^* < 0$, 这蕴含着(19)中的第1式不满足, 本文称此情形为初始受阻情形, 本小节将讨论在此情形下的优化控制策略.

从本质上考虑, 为了保证 $J(h)$ 能获得最大值, 应该使种群在每个区间 $(t_k, t_{k+1}]$ 上获得最大的增长. 为此定义下面函数:

$$f(N(t_k^+)) = N(t_{k+1}) - N(t_k^+) = \frac{N(t_k^+)}{(D_k + B_k(N(t_k^+))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}} - N(t_k^+), \quad (24)$$

这里 $f(N(t_k^+))$ 表示种群在区间 $(t_k, t_{k+1}]$ 内的增长量. 首先证明下面结果:

定理3 函数 $f(N(t_k^+))$ 在 $N(t_k^+) = N_k^*$ 处取得最大值; 当 $N(t_k^+) \leq N_k^*$ 时, $f(N(t_k^+))$ 为增函数, 当 $N(t_k^+) \geq N_k^*$ 时, $f(N(t_k^+))$ 为减函数, 其中 N_k^* 由(17)式确定.

证明 令 $f(x) = \frac{x}{(D_k + B_k x^\theta)^{\frac{1}{\theta}}} - x$, 则 $f(x)$ 的导数为

$$f'(x) = \frac{D_k - (D_k + B_k x^\theta)^{\frac{\theta+1}{\theta}}}{(D_k + B_k x^\theta)^{\frac{\theta+1}{\theta}}}. \quad (25)$$

令 $f'(x) = 0$ 得到

$$x = \left(\frac{D_k^{\frac{\theta}{\theta+1}} - D_k}{B_k} \right)^{\frac{1}{\theta}} = N_k^*.$$

又因为

$$f''(x) = -(\theta + 1)B_k^{\frac{1}{\theta}}(1 - D_k^{\frac{1}{\theta+1}})^{\frac{\theta-1}{\theta}} < 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $x = N_k^*$ 处取得最大值, 当 $N(t_k^+) \leq N_k^*$ 时, $f(N(t_k^+))$ 为增函数, 当 $N(t_k^+) \geq N_k^*$ 时, $f(N(t_k^+))$ 为减函数. 证毕.

注1 由定理3可知优化路径应是奇异路径尽可能接近的路径, 本文将其称为优化准则.

注2 因为 $N(t_k^+) = N_k^*$ 使得种群在区间 $(t_k, t_{k+1}]$ 内获得最大增长量, 为了强调 N_k^* 与 $(t_k, t_{k+1}]$ 之间的关系, 在下文中将 N_k^* 记为 $N^*(t_k, t_{k+1})$.

在下文中将系统(1)满足初值条件 $N(s) = x$ 的唯一解记为 $N(t; s, x)$. 特别地, 允许 $s < t$.

由定理3容易证明下面结论:

定理4 对于 $HP[t_0, t_1, \dots, t_n, T]$, 通过(16)式计算 h_k^* , 假设 $h_0^* < 0$, 而 $h_k^* \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则优化控制问题(21) ~ (23)的最优控制策略 $\pi = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ 为:

$$\begin{aligned} h_0 &= 0, \\ N(t_0) &= N_0, N(t_k) = N(t_k; t_{k-1}, N(t_{k-1}^+)), \end{aligned}$$

$$h_k = \max\{0, N(t_k) - N_k^*\}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

证明 (i) 首先,由题设条件 $h_0^* < 0$, 即有 $N(t_0) = N_0 < N_0^*$. 若取 $h_0 > 0$, 则以 $N(t_0^+) = N_0$ 为初值的解与以 $N(t_0^+) = N_0 - h_0$ 为初值的解相比较, 在区间 $(t_0, t_1]$ 内前者与奇异路径更接近, 因此由定理 3 及注 1 可知, 选择 $N(t_0^+) = N_0$, 即令 $h_0 = 0$ 可以使种群在区间 $(t_0, t_1]$ 上的增长量达到最大, 因此在 $t = t_0$ 处的优化收获量应为 $h_0 = 0$.

(ii) 在 $h_0 = 0$ 的基础上, 关于 $t = t_1$ 时刻的优化收获量, 需考虑下面 2 种情形:

(a) 如果 $N(t_1; t_0, N_0) < N_1^*$, 在这种情形下, 按照与 (i) 中相同的推理可知取 $h_1 = 0$ 是 $t = t_1$ 处的最优收获量.

(b) 如果 $N(t_1; t_0, N_0) \geq N_1^*$, 在这种情形下, 如果取 $h_1 = N(t_1; t_0, N_0) - N_1^*$, 这时在 $t = t_1$ 时从 $N(t_k^+) = N(t_1; t_0, N_0) - h_1 = N_1^*$ 出发的解在区间 $(t_1, t_2]$ 内与奇异路径重合, 则由定理 3 及优化准则可知, $h_1 = N(t_1; t_0, N_0) - N_1^*$ 是 $t = t_1$ 时刻的最优收获量.

由定理 4 条件可知, 在此情形下进一步可获得 $t = t_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 各时刻的优化收获量为:

$$h_k = N(t_k; t_{k-1}, N_{k-1}^+) - N_k^*, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

(iii) 如果 (ii) 中的情形 (a) 发生, 那么关于 $t = t_2$ 时刻的优化收获问题, 又需分别考虑 $N(t_2; t_0, N_0) < N_2^*$ 及 $N(t_2; t_0, N_0) \geq N_2^*$ 2 种情况, 并可得到与 (ii) 类似的结果.

以此类推, 即可知优化收获问题 (21) ~ (23) 的最优控制策略由 (26) 给出. 证毕.

2.2 基本受阻情形 考虑下面收获系统:

$$\begin{cases} N'(t) = r(t)N(t) - m(t)N^{\theta+1}(t), & t \neq t_0, t_1, \\ N(t_k^+) = N(t_k) - h_k, & t = t_0, t_1, \\ N(t_0) = N_0 > 0. \end{cases} \quad (27)$$

在系统 (27) 中, 允许在 $t = t_0, t_1$ 时刻进行收获. 如果种群增长率较低, 则由 (16) 式所求得的 h_1^* 可能具有性质 $h_1^* < 0$, 这意味着 (19) 式中 $k = 1$ 时的条件不满足, 本文称此情形为基本受阻情形.

本小节主要研究在基本受阻情形下的优化收获问题. 通过选择 $h = (h_0, h_1)$ 作为控制变量, 在下面限制条件之下:

$$h_0 \geq 0, h_1 \geq 0, N(t) > 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (28)$$

对于不同初始数量的种群, 确定 h_0, h_1 的值, 使得下面目标泛函:

$$J(h) = h_0 + h_1 + N(T) \quad (29)$$

获取最大值. 此时称 $J(h)$ 取得最大值的控制 $h = (h_0, h_1)$ 为收获问题 $HP[t_0, t_1, T]$ 的最优控制策略, 记为 $\pi^* = (h_0, h_1)$.

关于上面的优化控制问题, 本文有下面结论:

定理 5 对于由 (27) ~ (29) 所确定的 2 次收获问题 $HP[t_0, t_1, T]$, 假设由 (16) 式计算得到的 $h_1^* < 0$, 则该收获问题的最优收获策略 $\pi^* = (h_0, h_1)$ 可以通过以下步骤得到:

(i) 首先令 $h_1 = 0$, 这样收获问题 $HP[t_0, t_1, T]$ 将转化为一次收获问题 $HP[t_0, T]$;

(ii) 对于收获问题 $HP[t_0, T]$, 计算新的奇异种群水平

$$\tilde{N}_0^* = N^*(t_0, T) = \left(\frac{\tilde{D}_0^{\theta+1} - \tilde{D}_0}{\tilde{B}_0} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad (30)$$

其中

$$\tilde{D}_0 = \exp\left\{-\theta \int_{t_0}^T r(t) dt\right\}, \tilde{B}_0 = \theta \int_{t_0}^T \exp\left\{-\theta \int_s^T r(\sigma) d\sigma\right\} m(s) ds.$$

(iii) 对于不同的初始种群 $N(t_0) = N_0$, 收获问题 $HP[t_0, t_1, T]$ 的最优收获策略为:

$$h_0 = \max\{0, N_0 - \tilde{N}_0^*\}, h_1 = 0. \quad (31)$$

证明 (i) 首先对于优化问题(27) ~ (29), 由定理 3 及优化准则可知, 优化路径应与奇异路径是尽可能接近的, 因此无论初始种群 $N(t_0) = N_0$ 为何值, 选择 $h_1 = 0$ 都是最优的.

(ii) 根据前面的讨论, 要使种群在区间 $(t_0, T]$ 内获得最大的增长, 应该取 $N(t_0^+) = N_0^*$. 又因为 $h_1 = 0$, 这时 2 次收获问题 $HP[t_0, t_1, T]$ 自然地转化成了一次收获问题 $HP[t_0, T]$, 而由 $N(t_0^+) = N_0^*$ 所确定的系统 (27) 的解不一定能保证在整个区间 $(t_0, T]$ 内增长最大. 显然要得到最大的总收获量, 应该使 $(t_0, T]$ 内种群的增长最快. 此时应该将 $HP[t_0, T]$ 作为一个新的一次收获问题来考虑, 故应重新求解 $HP[t_0, T]$ 在 t_0 时刻的奇异种群水平, 这即为 (30) 式所给出的 $\tilde{N}_0^* = N^*(t_0, T)$. 进一步对一次收获问题 $HP[t_0, T]$, 由定理 4 可求得优化收获策略为:

$$h_0 = \max\{0, N_0 - \tilde{N}_0^*\}.$$

(iii) 综合 (i), (ii) 的讨论可知基本受阻情形下收获问题 $HP[t_0, t_1, T]$ 的最优收获策略即为:

$$h_0 = \max\{0, N_0 - \tilde{N}_0^*\}, h_1 = 0. \quad (32)$$

其中 \tilde{N}_0^* 由 (30) 式给出. 证毕.

3 数值模拟

前 2 节从理论上研究获得了收获问题 $HP[t_0, t_1, \dots, t_n, T]$ 的奇异控制策略, 并在此基础上研究了在奇异控制受阻情形下的最优收获策略, 本节将通过具体的收获模型验证前面所得理论结果的正确性.

(i) 初始受阻情形下的最优收获策略. 在系统 (21) 中, 首先选取各参数为 $r(t) = 0.6, m(t) = \exp\{-0.5t\}, \theta = 2$, 并假设在给定时间周期 $[t_0, T] = [25, 30]$ 内, 分别在 $t_0 = 25, t_1 = 27$ 时刻进行收获. 由 (17), (16) 式可确定奇异收获策略, 得到 $N_0^* = 194.1159, N_1^* = 287.51$ 以及 $h_1^* = 432 - N_1^* = 144.49 > 0$.

当取初值 $N_0 = 190$ 时, 由于 $N_0 < N_0^*$, 因此收获问题 $HP[25, 27, 30]$ 为初始受阻情形下的优化收获问题, 那么由定理 4 可确定最优收获策略为 $\pi_1 = (h_0, h_1) = (0, 140.2914)$, 此时 $N(30) = 954.5364$, 把在该收获策略下种群在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量记为 $J(\pi_1)$, 则 $J(h_0, h_1) = h_0 + h_1 + N(30) = 1094.8$.

首先固定 $h_1 = 140.2914$, 而使 h_0 在满足 (22) 式的条件下变化, 则可以得到该收获问题的一个可行策略集 $S_1 = \{(h_0, h_1) = (h_0, 140.2914) \mid 0 \leq h_0 < 190\}$, 如果将由 S_1 中策略所确定的系统 (21) 的解在 $t = 30$ 时的值记为 $N(30, h_0)$, 则在时间周期 $[25, 30]$ 内种群的总收获量为 $J = J_1(h_0) = h_0 + 140.2914 + N(30, h_0)$. $J = J_1(h_0)$ 的关系由图 1 表示.

如果固定 $h_0 = 0$, 令 h_1 在满足 (22) 式的条件下变化, 则可以得到该收获问题的一个可行策略集 $S_2 = \{(h_0, h_1) = (0, h_1) \mid 0 \leq h_1 < 427.8014\}$, 类似地, 将由 S_2 中策略所确定的在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量记为 $J = J_2(h_1) = h_1 + N(30, h_1)$. $J = J_2(h_1)$ 的关系由图 2 表示.

图 1 (图 2) 显示, 当 $h_0 = 0 (h_1 = 140.2914)$ 时, 种群在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量最大. 其结果表明

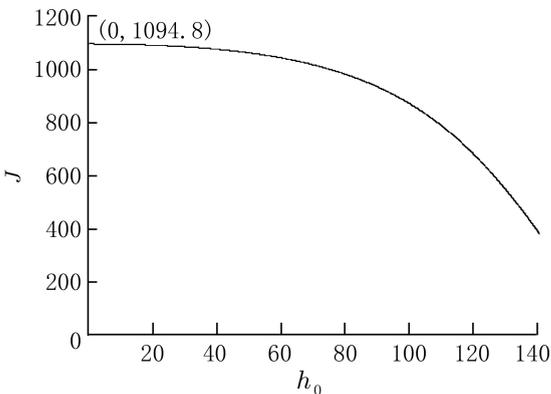


图 1 $N_0 = 190$, 收获曲线 $J = J_1(h_0)$

Fig.1 Harvest curve of $J = J_1(h_0)$, for $N_0 = 190$

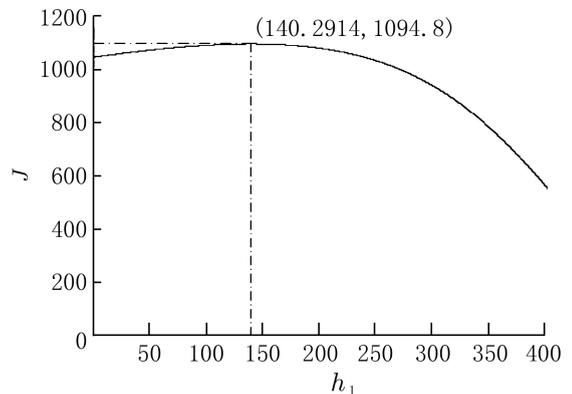


图 2 $N_0 = 190$, 收获曲线 $J = J_2(h_1)$

Fig.2 Harvest curve of $J = J_2(h_1)$, for $N_0 = 190$

按照定理 4 给出的收获策略 π_1 进行收获,种群在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量最大.

(ii) 基本受阻情形下的最优收获策略. 令系统 (21) 中 $r(t) = 0.3$, 其余参数与 (i) 的中相同. 则由 (17), (16) 以及 (30) 式可分别求得 $N_0^* = 172.6181, N_1^* = 292.7507, \tilde{N}_0^* = 188.5709$ 及 $h_1^* = 257.5266 - N_1^* < 0$. 由于 $h_1^* < 0$, 收获问题 $HP[25, 27, 30]$ 为基本受阻情形下的收获问题.

(a) 首先考虑 $N_0 > \tilde{N}_0^*$ 的情形, 取 $N_0 = 500 > 188.5709$. 由定理 5 可知最优收获策略为 $\pi_2 = (h_0, h_1) = (311.4291, 0)$, 以该优化策略进行收获可得 $N(30) = 512.4911$, 因此在 $[25, 30]$ 时间段内最优收获量 $J(\pi_2) = h_0 + h_1 + N(30) = 823.9202$.

如果固定 $h_1 = 0$, 而令 h_0 在满足 (22) 式的条件下变化, 类似地, 可以得到该收获问题的一个可行策略集 $S_3 = \{(h_0, h_1) = (h_0, 0) \mid 0 \leq h_0 < 500\}$, 在该策略集下种群在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量记为 $J = J_3(h_0) = h_0 + N(30, h_0)$. $J = J_3(h_0)$ 关系由图 3 表示.

如果固定 $h_0 = 311.4291$, 而令 h_1 在满足 (22) 式的条件下变化, 同样得到收获问题的一个可行策略集 $S_4 = \{(h_0, h_1) = (311.4291, h_1) \mid 0 \leq h_1 < 272.767\}$, 在该策略集下种群在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量记为 $J = J_4(h_1) = 311.4291 + h_1 + N(30, h_1)$. $J = J_4(h_1)$ 的关系由图 4 表示.

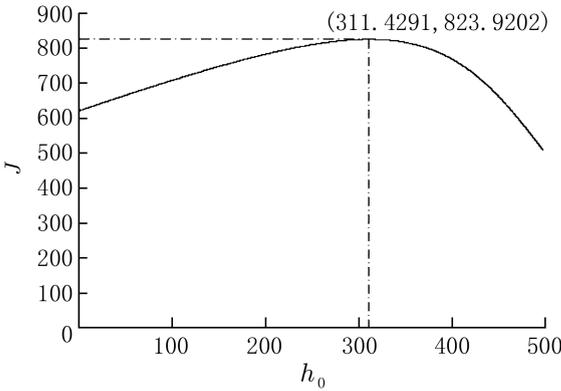


图 3 $N_0 = 500$, 收获曲线 $J = J_3(h_0)$

Fig.3 Harvest curve of $J = J_3(h_0)$, for $N_0 = 500$

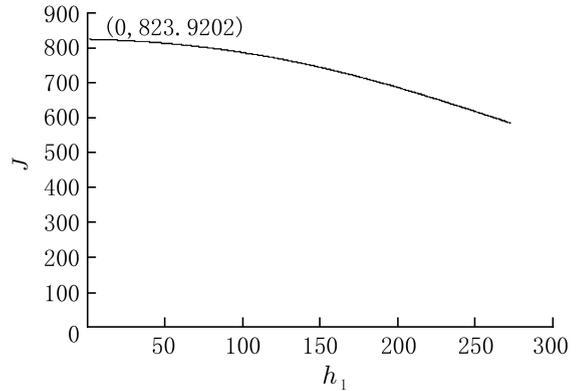


图 4 $N_0 = 500$, 收获曲线 $J = J_4(h_1)$

Fig.4 Harvest curve of $J = J_4(h_1)$, for $N_0 = 500$

图 3(图 4) 表明, 当 $h_0 = 311.4291$ ($h_1 = 0$) 时种群在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量最大, 即按照定理 5 给出的收获策略 π_2 是最优收获策略.

(b) 对于 $N_0 < \tilde{N}_0^*$ 的情形, 取 $N_0 = 140 < 188.5709$, 对于这个收获问题, 由定理 5 可知最优收获策略为 $\pi_3 = (h_0, h_1) = (0, 0)$, 以 π_3 收获时可知 $N(30) = 449.5837$, 因此种群在 $[25, 30]$ 时间段内的最优收获量为 $J(\pi_3) = h_0 + h_1 + N(30) = 449.5837$.

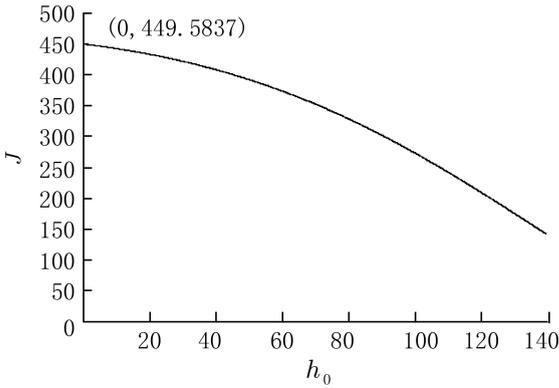
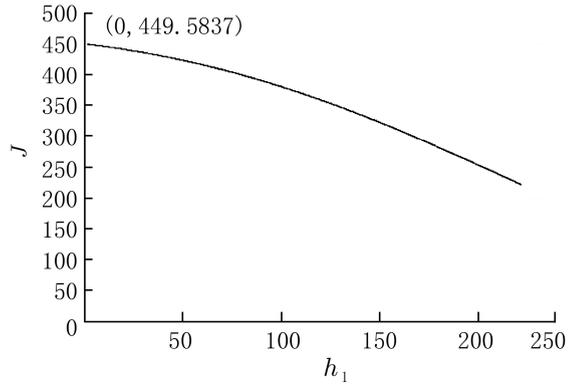
如果固定 $h_1 = 0$, 应用可行策略集 $S_5 = \{(h_0, h_1) = (h_0, 0) \mid 0 \leq h_0 < 140\}$ 中的策略进行收获. 在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量记为 $J = J_5(h_0) = h_0 + N(30, h_0)$. $J = J_5(h_0)$ 的关系由图 5 表示.

如果固定 $h_0 = 0$, 应用可行策略集 $S_6 = \{(h_0, h_1) = (0, h_1) \mid 0 \leq h_1 < 221.7447\}$ 中的策略进行收获, 在 $[25, 30]$ 时间段内的总收获量记为 $J = J_6(h_1) = h_1 + N(30, h_1)$. $J = J_6(h_1)$ 的关系由图 6 表示.

图 5, 图 6 表明由定理 5 给出的收获策略 π_3 是最优收获策略.

4 总 结

本文研究了一类由非自治 Gilpin-Ayala 模型描述的脉冲收获系统的优化控制问题. 在给定时间周期内对种群进行多次收获, 考虑如何选择收获努力量使种群在该周期内的总收获量达到最大, 寻求最优收获策略. 首先利用脉冲微分系统的极值原理获得了优化问题的奇异控制, 如果奇异控制是可行的, 则由极值原理知其即为最优收获策略 (定理 2). 在文献 [3] 中得到的关于 logistic 脉冲控制收获问题的最优控制即是在奇异控制可行的条件下得到的, 但是对于奇异控制所需的条件不满足时的优化控制如何确定并未进

图 5 $N_0 = 140$, 收获曲线 $J = J_5(h_0)$ Fig.5 Harvest curve of $J = J_5(h_0)$, for $N_0 = 140$ 图 6 $N_0 = 140$, 收获曲线 $J = J_6(h_1)$ Fig.6 Harvest curve of $J = J_6(h_1)$, for $N_0 = 140$

行研究.因此本文选择了推广的 logistic 模型-Gilpin-Ayala 脉冲收获系统进一步研究了这类优化控制问题.首先研究了种群增长量与收获努力量的关系,得到一个基本的优化原理:最优路径应该与奇异路径尽可能接近(定理 3).以此为基础,研究确定了对于不同初始数量的种群,在 2 种不同受阻情形下的优化控制策略(定理 4,定理 5).本文的主要结果推广改进了文献[3]中的相关结论.

参考文献:

- [1] CLARK C W. Mathematical bioeconomics: The optimal management of renewable resources [M]. New York: John Wiley & Sons, 1976.
- [2] ZHAO Z, ZHANG X Q, CHEN L S. The effect of pulsed harvesting policy on the inshore-offshore fishery model with impulsive diffusion [J]. Nonlinear Dyn, 2011, 63(4): 537-545.
- [3] XIAO Y N, CHENG D Z, QIN H S. Optimal impulsive control in periodic ecosystem [J]. Syst Control Lett, 2006, 55(7): 558-565.
- [4] GAO R, LIU X Z, YANG J L. On optimal control problems of a class of impulsive switching systems with terminal states constraints [J]. Nonlinear Anal, 2010, 73(7): 1940-1951.
- [5] COOKE K L, WITTEN M. One-dimensional linear and logistic harvesting models [J]. Math Model, 1986, 7(2): 301-340.
- [6] FAN M, WANG K. Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficient [J]. Math Biosci, 1998, 152: 165-177.
- [7] 李清, 王克, 范猛. 广义 logistic 模型的捕获优化问题 [J]. 生物数学学报, 2000, 15(4): 408-412.
LI Q, WANG K, FAN M. Optimal harvesting problem for generalized logistic model [J]. Journal of Biomathematics, 2000, 15(4): 408-412.
- [8] 李婧, 窦家维, 张爱景. 具有功能性反应的周期脉冲 3 种群食物链系统研究 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2016, 38(2): 178-186.
LI J, DOU J W, ZHANG A J. Study on a food chain system of three species with periodic impulses and functional response [J]. Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition, 2016, 38(2): 178-186.
- [9] 王丽敏, 谭远顺. 周期 Gompertz 生态系统中的最优脉冲收获控制策略 [J]. 系统科学与数学, 2007, 27(4): 520-528.
WANG L M, TAN Y S. Optimal impulsive control policy in periodic Gompertz ecosystem [J]. J Sys Sci and Math Scis, 2007, 27(4): 520-528.
- [10] QIU H, LYU J L, WANG K. The optimal harvesting policy for non-autonomous populations with discount [J]. Applied Math Lett, 2013, 26(2): 244-248.
- [11] 张晓颖, 李晚霞. 单种群生物资源的最优开发 [J]. 长春大学学报, 2001, 11(6): 20-22.
ZHANG X Y, LI W X. Optimal exploitation of biological single species [J]. Journal of Changchun University, 2001, 11(6): 20-22.
- [12] 郭海叶, 窦家维, 赵莲. 周期 Gilpin-Ayala 脉冲收获系统的最优控制策略 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2015, 37

(10):93-98.

GUO H Y, DOU J W, ZHAO L. Optimal control strategy for the periodic Gilpin-Ayala impulsive harvesting system[J]. Journal of Southwest University: Natural Sciences Edition, 2015, 37(10):93-98.

- [13] BLAQUIERE A. Differential games with piece-wise continuous trajectories[J]. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer Verlag, 1977, 3:34-69.
- [14] BRAVERMAN E, MAMDANI R. Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment[J]. J Math Biol, 2008, 57(3):413-434.
- [15] 窦家维, 刘贤波. 周期 Gompertz 脉冲收获系统的最优控制策略[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(3):297-308.
DOU J W, LIU X B. The optimal control to maximize economic return for periodic Gompertz system with impulsive with impulsive harvest[J]. J Sys Sci and Math Scis, 2013, 33(3):297-308.
- [16] DONG L Z, CHEN L S, SUN L H. Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems[J]. Nonlinear Anal: Real World Applcat, 2007, 8(2):572-578.

The maximum harvesting yield of non-autonomous Gilpin-Ayala model with impulsive harvests

WU Yan-mei, DOU Jia-wei, MA Li

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: It is devoted to study a class of optimal harvesting problem for a non-autonomous Gilpin-Ayala model with impulsive harvests, and the species is harvested at fixed moments. By choosing the harvesting efforts as control variables, we study a maximum harvesting problem in given time range for a general non-autonomous Gilpin-Ayala system. Firstly, we obtain the singular harvesting strategy by using the maximum principle of impulsive differential system. Furthermore, we consider the control problems for the situations in which the singular controls are blocked at some harvesting moments. Therefore we first establish an optimization principle: the optimal path lies as close as possible to the singular path. And based on this optimization principle, the optimal harvest strategies in some blocked situations are obtained. The results of this paper extend and improved some relevant conclusions about the control problem with impulsive harvests.

Key words: non-autonomous Gilpin-Ayala model; impulsive harvest; the maximum principle; blocked situation; the optimal harvesting strategy