云南大学学报(自然科学版),2024, 46(2):201~212 DOI: 10.7540/j.ynu.20220592
Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition

变分法研究一类分数阶微分方程边值问题解的存在性

黎文博，周文学**，吴亚斌，张　敏
(兰州交通大学 数理学院,甘肃 兰州　730070)

摘要: 利用一类分数阶微分方程边值问题的变分法,建立了该边值问题解存在的充分条件. 然后将问题归结为一个等价的积分形式,使得边值问题的解被定义为对应泛函的临界点. 最后利用山路引理,建立了该边值问题解的存在性.

关键词: 临界点理论; 变分法; 边值问题; 梯度
中图分类号: O175.8　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 0258−7971(2024)02−0201−12

分数阶微分方程一直备受关注,这是因为分数阶微积分理论本身的深入发展以及这种结构在物理、力学、化学、工程、生物学、地质学以及控制理论、信号理论、纳米科学等各个科学领域的应用[1-3]. 其中,分数阶微分方程边值问题作为分数阶微分方程理论中的一个重要问题,也得到众多学者关注,但其绝大部分工作均基于 Riemann-Liouville 或 Caputo 分数阶导数[4-9].

临界点理论在处理具有某些边界条件的整数阶微分方程解的存在性和多重性方面非常有用[10-13]. 但是到目前为止,利用临界点理论,通过变分方法来研究分数阶边值问题解的存在性报道相对较少[14-21].

Jiao 等在文献 [17] 中利用临界点理论研究了分数阶边值问题

$$\begin{cases} {}_tD_T^{\alpha}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)=\nabla F(t,u(t)),t\in[0,T], \\ u(0)=u(T)=0 \end{cases}$$

解的存在性. 其中 $\alpha\in(0,1]$, ${}_0D_t^{\alpha}$ 和 ${}_tD_T^{\alpha}$ 分别为左、右 Riemann-Liouville 分数阶导数, $F:[0,T]\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ 是给定的函数, $\nabla F(t,x)$ 为 F 在 x 处的梯度.

Bai 等在文献 [18] 中利用变分方法研究了扰动非线性分数阶边值问题

$$\begin{cases} {}_tD_T^{\alpha}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)=\lambda a(t)f(u(t))+\mu g(t,u(t)), \\ u(0)=u(T)=0 \end{cases}$$

解的存在性. 其中 $\alpha\in(0,\ 1]$, ${}_0D_t^{\alpha}$ 和 ${}_tD_T^{\alpha}$ 分别为左、右 Riemann-Liouville 分数阶导数, λ,μ 为非负参数, $a:[0,T]\to\mathbf{R}$, $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$和$g:[0,T]\to\mathbf{R}$ 是 3 个连续的函数.

受以上工作启发,本文利用临界点理论,通过变分方法研究分数阶边值问题 (BVP)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}{}_0^cD_t^{\beta}\left(u^2(t)\right)+\dfrac{1}{2}{}_t^cD_T^{\beta}\left(u^2(t)\right)\right)+\nabla F(t,u(t))=0, \\ u(0)=u(T)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性. 其中 ${}_0^cD_t^{\beta}$ 和 ${}_t^cD_T^{\beta}$ 分别为 $2\leqslant\beta<3$ 阶左、右 Caputo 分数阶导数, $F:[0,T]\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ 是一个连续函数 , $\nabla F(t,u(t))$ 为 F 在 x 处的梯度.

收稿日期: 2022-10-27;　**接受日期:** 2023-04-02;　**网络出版日期:** 2023-12-05
基金项目: 国家自然科学基金(11961039);兰州交通大学校青年科学基金(2017012).
作者简介: 黎文博(1998−),男,甘肃人,硕士生,主要研究分数阶微分方程. E-mail: wbli2022@126.com.
** **通信作者:** 周文学(1976−),男,甘肃人,博士,教授,主要研究非线性分析. E-mail: wxzhou2006@126.com.

1 预备知识

定义 1[22] 左右 Riemann-Liouville 分数阶导数, 设 f 是一个定义在 $[a,b]$ 上的函数. 用 ${}_aD_t^\gamma f(t)$ 和 ${}_tD_b^\gamma f(t)$ 表示函数 f 的左、右 γ 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数分别被定义为

$$ {}_aD_t^\gamma f(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}{}_aD_t^{\gamma-1}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_a^t(t-s)^{n-\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s\right), $$

$$ {}_tD_b^\gamma f(t)=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}{}_tD_b^{\gamma-1}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_t^b(s-t)^{n-\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s\right). $$

其中 $t\in[a,b]$, $n-1\leqslant\gamma<n$ 和 $n\in\mathbf{N}$. 特别的, 如果 $0\leqslant\gamma<1$, 那么

$$ {}_aD_t^\gamma f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_aD_t^{\gamma-1}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^t(t-s)^{-\gamma}f(s)\mathrm{d}s\right),t\in[a,b], $$

$$ {}_tD_b^\gamma f(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_tD_b^{\gamma-1}f(t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_t^b(s-t)^{-\gamma}f(s)\mathrm{d}s\right),t\in[a,b]. $$

定义 2[22] 左右 Caputo 数阶导数, 设 $\gamma\geqslant0$ 且 $n\in\mathbf{N}$.

(i) 如果 $\gamma\in(n-1,n)$ 和 $f\in AC^n\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$, 那么函数 f 的左右 Caputo 分数阶导数表示为 ${}_a^cD_t^\gamma f(t)$ 和 ${}_t^cD_b^\gamma f(t)$, 且在 $[a,b]$ 上几乎处处都存在. ${}_a^cD_t^\gamma f(t)$ 和 ${}_t^cD_b^\gamma f(t)$ 表示为

$$ {}_a^cD_t^\gamma f(t)={}_aD_t^{\gamma-n}f^{(n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\int_a^t(t-s)^{n-\gamma-1}f^{(n)}(s)\mathrm{d}s\right), $$

$$ {}_t^cD_b^\gamma f(t)=(-1)^n{}_tD_b^{\gamma-n}f^{(n)}(t)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\int_t^b(s-t)^{n-\gamma-1}f^{(n)}(s)\mathrm{d}s\right). $$

其中 $t\in[a,b]$. 特别的, 如果为 $0<\gamma<1$, 那么有

$$ {}_a^cD_t^\gamma f(t)={}_aD_t^{\gamma-1}f'(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left(\int_a^t(t-s)^{-\gamma}f'(s)\mathrm{d}s\right),t\in[a,b], $$

$$ {}_t^cD_b^\gamma f(t)=-{}_tD_b^{\gamma-1}f'(t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left(\int_t^b(s-t)^{-\gamma}f'(s)\mathrm{d}s\right),t\in[a,b]. $$

(ii) 如果 $\gamma=n-1$ 和 $f\in AC^{n-1}\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$, 那么 ${}_a^cD_t^{n-1}f(t)$ 和 ${}_t^cD_b^{n-1}f(t)$ 分别表示为 ${}_a^cD_t^{n-1}f(t)=f^{(n-1)}(t)$ 和 ${}_t^cD_b^{n-1}f(t)=(-1)^{(n-1)}f^{(n-1)}(t)$, $t\in[a,b]$.

特别的, ${}_a^cD_t^0f(t)={}_t^cD_b^0f(t)=f(t)$, $t\in[a,b]$.

注 1 如果 $f\in C\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$, 那么很明显 f 存在 $\gamma>0$ 阶的黎曼−刘维尔分数阶积分. 另一方面, 如果 $f\in AC^n\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$, 那么在 $[a,b]$ 上存在 $\gamma\in[n-1,n)$ 阶黎曼−刘维尔分数阶导数, 其中 $C^k\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$ $(k=0,1,\cdots)$ 表示在 $[a,b]$ 上有 k 次连续可微的映射集, $AC\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$ 是在 $[a,b]$ 上绝对连续的函数空间, $AC^{(k)}\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)(k=0,1,\cdots)$ 是函数 f 的空间, 使得 $f\in C^{k-1}\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$ 和 $f^{(k-1)}\in AC^n\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$. 特别有 $AC\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)=AC^1\left([a,b],\mathbf{R}^N\right)$.

2 分数阶导数空间

对于任何固定的 $t\in[0,T]$ 和 $1\leqslant p<\infty$, 有

$$ \|u\|_{L^p([0,t])}=\left(\int_0^t|u(\xi)|^p\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}},\|u\|_{L^p}=\left(\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\text{和}\|u\|_\infty=\max_{t\in[0,T]}|u(t)|. $$

引理 1 设 $0<\alpha\leqslant1$, $1\leqslant p<\infty$, 对于任何一个 $f\in L^p\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 和 $\xi\in[0,t]$, $t\in[0,T]$, 我们有

$$ \left\|{}_0D_\xi^{-\alpha}f\right\|_{L^p([0,t])}\leqslant\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^p([0,t])}. \tag{2} $$

证明 受 Young 定理[23] 启发, 我们可以证明 (2) 式. 事实上, 如果 $p=1$ 且对于任意 $t\in[0,T]$, 我们有

$$\left\|{}_0D_\xi^{-\alpha}f\right\|_{L^1([0,t])}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t\int_0^\xi(\xi-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^\xi(\xi-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|f(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\int_\tau^t(\xi-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t|f(t)|(t-\tau)^\alpha\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^1([0,t])}.\tag{3}$$

现在, 假设 $1\leqslant p<\infty$ 和 $g\in L^p\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$, 其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 则有

$$\left|\int_0^t g(\xi)\int_0^\xi(\xi-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\right|=\left|\int_0^t g(\xi)\int_0^\xi\tau^{\alpha-1}f(\xi-\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\right|\leqslant$$
$$\int_0^t|g(\xi)|\int_0^\xi\tau^{\alpha-1}|f(\xi-\tau)|\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi=\int_0^t\tau^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau\int_\tau^t|g(\xi)||f(\xi-\tau)|\,\mathrm{d}\xi=$$
$$\int_0^t\tau^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau\left(\int_\tau^t|g(\xi)|^q\mathrm{d}\xi\right)^{1/q}\left(\int_\tau^t|f(\xi-\tau)|^p\mathrm{d}\xi\right)^{1/p}\leqslant\frac{t^\alpha}{\alpha}\|f\|_{L^p([0,t])}\|g\|_{L^p([0,t])}.\tag{4}$$

对于任何固定的 $t\in[0,T]$, 考虑函数 $H_{\xi*f}:L^p\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)\to\mathbf{R}$, 定义如下:

$$H_{\xi*f}(g)=\int_0^t\left[\int_0^\xi(\xi-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]g(\xi)\,\mathrm{d}\xi.\tag{5}$$

根据 (4) 式可以明显看出, $H_{\xi*f}\in\left(L^q\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)\right)^*$, 其中 $\left(L^q\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)\right)^*$ 表示 $L^q\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 的对偶空间. 因此, 通过 (4), (5) 式和 Riesz 表示定理, 存在 $h\in L^p\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 及 $g\in L^P\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$, 使得

$$\int_0^t h(\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_0^t\left[\int_0^\xi(\xi-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]g(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\tag{6}$$

$$\|h\|_{L^P([0,t])}\leqslant\frac{t^\alpha}{\alpha}\|f\|_{L^P([0,t])}.\tag{7}$$

因此, 通过 (6) 式我们有

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}h(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\xi(\xi-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau={}_0D_\xi^{-\alpha}f(\xi),\xi\in[0,t],$$

即

$$\left\|{}_0D_\xi^{-\alpha}f\right\|_{L^p([0,t])}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|h\|_{L^p([0,t])}\leqslant\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^p([0,t])}.\tag{8}$$

结合 (3), (8) 式, 我们得到了不等式 (2). 证毕.

定义 3[22] 设 $0<\alpha\leqslant1$, $1\leqslant p<\infty$. 分数阶导数空间 $E_0^{\alpha,p}$ 定义为由 $C_0^\infty\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 关于范数

$$\|u\|_{\alpha,p}=\left(\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t+\int_0^T\left|{}_0D_t^\alpha\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\forall u\in E_0^{\alpha,P}\tag{9}$$

在 $E_0^{\alpha,p}$ 中的闭包.

引理 2[22] 设 $0<\alpha\leqslant1$, $1\leqslant p<\infty$, 则空间 $E_0^{\alpha,p}$ 关于范数 $\|u\|_{\alpha,p}$ 是一个可分自反 Banach 空间.

引理 3[22] 设 $0<\alpha\leqslant1$, $1\leqslant p<\infty$. 对于所有的 $u\in E_0^{\alpha,P}$, 有

$$\|u\|_{L^p}\leqslant\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|{}_0D_t^\alpha u\right\|_{L^p}.$$

此外, 如果 $\alpha>\dfrac{1}{\mathrm{p}}$ 和 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 那么

$$\|u\|_\infty\leqslant\frac{T^{\alpha-1/P}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)q+1)^{1/q}}\left\|{}_0D_t^\alpha u\right\|_{L^P}.\tag{10}$$

引理 4[22] 设 $0<\alpha\leqslant1$, $1\leqslant p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $\alpha>\dfrac{1}{p}$. 如果 $E_0^{\alpha,p}$ 中点列 $\{u_k\}$ 弱收敛于 $u\in E_0^{\alpha,P}$, 即 $u_k\rightharpoonup u$, 那么在 $C\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 中 $u_k\to u$, 即 $k\to\infty$ 时, $\|u_k-u\|_\infty\to0$.

3 变分结构

在本节中，我们将建立一个变分结构，使我们能够将 BVP(1) 解的存在性简化为寻找定义在空间 $E_0^{\alpha,p}\left(p=2 \text{ 和 } \alpha\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right]\right)$ 上的对应泛函的临界点.

首先，利用 Caputo 分数阶导数的性质，对于任意 $u\in AC\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$，BVP(1) 可变换为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}{}_0^cD_t^{\frac{\beta}{2}}\left({}_0^cD_t^{\frac{\beta}{2}}u^2(t)\right)+\dfrac{1}{2}{}_t^cD_T^{\frac{\beta}{2}}\left({}_t^cD_t^{\frac{\beta}{2}}u^2(t)\right)\right)+\nabla F(t,u(t))=0, \\ u(0)=u(T)=0, \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\beta\in[2,\ 3)$.

此外，根据定义 2，很明显 $u\in AC\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 是 BVP(11) 的一个解，当且仅当 u 是以下问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)-\dfrac{1}{2}{}_t^cD_T^{\alpha}\left({}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)\right)+\nabla F(t,u(t))=0, \\ u(0)=u(T)=0 \end{cases} \tag{12}$$

的解. 其中，$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$. 因此，我们求出了 BVP(12) 的解 u，在 $u\in AC\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 的条件下，就对应于 BVP(1) 的解 u.

记:

$$D^{\alpha}(u(t))=\frac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)-\frac{1}{2}{}_t^cD_T^{\alpha}\left({}_tD_T^{\alpha}u(t)\right). \tag{13}$$

下面我们给出 BVP(12) 的解的定义.

定义 4 函数 $u\in AC\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 称为 BVP(1) 的解，如果:

(i) $D^{\alpha}(u(t))$ 对于几乎每一个 $t\in[0,T]$ 可导;

(ii) u 满足 BVP(12).

接下来，我们在 Hilbert 空间 $E^{\alpha}=E_0^{\alpha,2}$ 中用范数 $\|u\|_{\alpha}=\|u\|_{\alpha,2}\left(\|u\|_{\alpha,p}=\left\|{}_0D_t^{\alpha}u\right\|_{L^p}=\left(\int_0^T\left|{}_0D_t^{\alpha}u\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ 处理 BVP(12).

引理 5 如果 $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，那么对于任意的 $u\in E^{\alpha}$，有

$$|\cos(\pi\alpha)|\|u\|_{\alpha}^2\leqslant-\int_0^T\left({}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{|\cos(\pi\alpha)|}\|u\|_{\alpha}^2. \tag{14}$$

证明 设 $u\in E^{\alpha}$ 且 $\tilde{u}$ 是 u 在 $R/[0,\mathrm{T}]$ 上的零延拓，则 $\sup p(\tilde{u})\subseteq[0,T]$. 然而，由于左右分数阶导数是非局部的,

$$\operatorname{supp}\left({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{u}\right)\subseteq[0,\infty),\operatorname{supp}\left({}_tD_{\infty}^{\alpha}\tilde{u}\right)\subseteq(-\infty,T].$$

尽管如此，$\left({}_{-\infty}D_t^{\alpha}u,{}_tD_{\infty}^{\alpha}u\right)$ 在 $[0,T]$ 也成立.

另一方面，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{u}(t),{}_tD_{\infty}^{\alpha}\tilde{u}(t)\right)\mathrm{d}t=\cos(\pi\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\left|{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{u}(t)\right|^2\mathrm{d}t=\cos(\pi\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\left|{}_tD_{\infty}^{\alpha}\tilde{u}(t)\right|^2\mathrm{d}t. \tag{15}$$

其中 ${}_{-\infty}D_t^{\alpha}$ 和 ${}_tD_{\infty}^{\alpha}$ 为实线上的 Riemann–Liouville 分数阶导数. 又因为 $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，所以 $\cos(\pi\alpha)\in[-1,0)$. 故有

$$-\int_0^T\left({}_0D_{\mathrm{t}}^{\alpha}u(t),{}_tD_{\mathrm{T}}^{\alpha}u(t)\right)\mathrm{d}t=-\int_0^T\left({}_0D_{\mathrm{t}}^{\alpha}\tilde{u}(t),{}_tD_{\mathrm{T}}^{\alpha}\tilde{u}(t)\right)\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{\infty}\left({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{u}(t),{}_tD_{\infty}^{\alpha}\tilde{u}(t)\right)\mathrm{d}t=$$

$$-\cos(\pi\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\left|{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{u}(t)\right|^2\mathrm{d}t\geqslant-\cos(\pi\alpha)\int_0^T\left|{}_0D_t^{\alpha}u(t)\right|^2\mathrm{d}t=|\cos(\pi\alpha)|\|u\|_{\alpha}^2.$$

另一方面, 利用 Young 不等式, 我们有

$$\left|\int_0^T \left({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}} \left|{}_0D_t^\alpha u(t)\right| \sqrt{2} \left|{}_tD_T^\alpha u(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T \left|{}_0D_t^\alpha u(t)\right|^2 \mathrm{d}t + \varepsilon \int_0^T \left|{}_tD_T^\alpha u(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_\alpha^2 + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left|{}_tD_\infty^\alpha \tilde{u}(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_\alpha^2 + \frac{\varepsilon}{|\cos(\pi\alpha)|}\left|\int_0^T \left({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right) \mathrm{d}t\right|.$$

因此, 取 $\varepsilon = \dfrac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}$, 有

$$\left|\int_0^T \left({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\cos(\pi\alpha)|}\|u\|_\alpha^2.$$

证毕.

注 2 根据 (12) 和 (14) 式, 对于任意的 $u \in E^\alpha$ 有

$$\int_0^T \left|{}_tD_T^\alpha u(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|{}_tD_\infty^\alpha \tilde{u}(t)\right|^2 \mathrm{d}t = -\int_0^T \frac{\left({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right)}{|\cos(\pi\alpha)|} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{|\cos(\pi\alpha)|^2}\|u\|_\alpha^2,$$

即 ${}_tD_T^\alpha u(t) \in L^2\left([0,T], \mathbf{R}^N\right)$.

我们现在的任务是在 $E^\alpha\left(\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ 上建立一个变分结构. 此外, 我们将证明该泛函的临界点是 BVP(11) 的解, 因此也是 BVP(1) 的解.

定理 1 设 $L : [0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ 定义为

$$L(t,x,y,z) = -\frac{1}{2}(y,z) - F(t,x),$$

其中 $F : [0,T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ 满足以下假设:

(H_1) $F(t,x)$ 对于每一个 $x \in \mathbf{R}^N$ 在 t 上可测, 对于几乎每一个 $t \in [0,T]$ 在 x 上连续可微且存在 $m_1 \in C\left(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+\right), m_2 \in L^1\left([0,T], \mathbf{R}^+\right)$, 使得

$$|F(t,x)| \leqslant m_1(|x|)m_2(t), |\nabla F(t,x)| \leqslant m_1(|x|)m_2(t), x \in \mathbf{R}^N \text{且} t \in [0,T].$$

如果 $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, 那么函数 φ 定义为

$$\varphi(u) = \int_0^T L\left(t, u(t), {}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^T \left[-\frac{1}{2}\left({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right) - F(t, u(t))\right] \mathrm{d}t,$$

且在 E^α 上是连续可微的, 对于任意的 $u, v \in E^\alpha$ 有

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi'(u), v\right\rangle = &\int_0^T \left(D_x L\left(t, u(t), {}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right)\right) \mathrm{d}t + \int_0^T \left(D_y L\left(t, u(t), {}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t), {}_0D_t^\alpha v(t)\right)\right) \mathrm{d}t + \\ &\int_0^T \left(D_z L\left(t, u(t), {}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha v(t)\right)\right) \mathrm{d}t = \\ &-\int_0^T \frac{1}{2}\left[\left({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha v(t)\right) + \left({}_tD_T^\alpha u(t), {}_0D_t^\alpha v(t)\right)\right] \mathrm{d}t - \int_0^T (\nabla F(t, u(t)), v(t)) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{16}$$

证明 首先, 对于任意的 $t \in [0,T]$ 和每一个 $[x,y,z] \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, 有

$$|L(t,x,y,z)| \leqslant m_1(|x|)m_2(t) + \frac{1}{4}\left(|y|^2 + |z|^2\right), \tag{17}$$

$$|D_x L(t,x,y,z)| \leqslant m_1(|x|)m_2(t), \tag{18}$$

$$\left|D_y L(t,x,y,z)\right| \leqslant \frac{1}{2}|z| \text{和} |D_z L(t,x,y,z)| \leqslant \frac{1}{2}|y|. \tag{19}$$

然后, 通过文献 [24] 定理 1.4 可得, φ 在每一点 u 上有一个由 (16) 式给出的方向导数 $\varphi'(u) \in (E^\alpha)^*$, 并且映射 $\varphi' : E^\alpha \to (E^\alpha)^*$, $u \to \varphi'(u)$ 是连续的.

(1) 由注 2 和 (17) 式可以很容易得出 φ 在 E^α 上处处有限. 下面让我们定义, 对于固定在 E^α 上的 u 和 v, 以及 $t \in [0,T]$, $\lambda \in [-1,1]$, 有

$$G(\lambda,t)=L\left(t,u(t)+\lambda v(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t)+\lambda_0D_t^{\alpha}v(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)+\lambda_tD_T^{\alpha}v(t)\right)$$

和

$$\psi(\lambda)=\int_0^T G(\lambda,t)\mathrm{d}t=\varphi(u+\lambda v).$$

我们将对 ψ 应用积分符号下的牛顿莱布尼兹公式. 由 (18) 和 (19) 式, 我们有

$$\begin{aligned}|D_\lambda G(\lambda,t)|=&\left|D_xL\left(t,u(t)+\lambda v(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t)+\lambda_0D_t^{\alpha}v(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)+\lambda_tD_T^{\alpha}v(t)\right),v(t)\right|+\\&\left|D_yL\left(t,u(t)+\lambda v(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t)+\lambda_0D_t^{\alpha}v(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)+\lambda_tD_T^{\alpha}v(t)\right),{}_0D_t^{\alpha}v(t)\right|+\\&\left|D_zL\left(t,u(t)+\lambda v(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t)+\lambda_0D_t^{\alpha}v(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)+\lambda_tD_T^{\alpha}v(t)\right),{}_tD_T^{\alpha}v(t)\right|\leqslant\\&m_1(|u(t)+\lambda v(t)|)m_2(t)|v(t)|+\frac{1}{2}\left|{}_tD_T^{\alpha}u(t)+\lambda_tD_T^{\alpha}v(t)\right|\left|{}_0D_t^{\alpha}v(t)\right|+\\&\frac{1}{2}\left|{}_0D_t^{\alpha}u(t)+\lambda_0D_t^{\alpha}v(t)\right|\left|{}_tD_T^{\alpha}v(t)\right|\leqslant m_0m_2(t)|v(t)|+\frac{1}{2}\left|{}_tD_T^{\alpha}u(t)\right|\left|{}_0D_t^{\alpha}v(t)\right|+\\&\frac{1}{2}\left|{}_0D_t^{\alpha}u(t)\right|\left|{}_tD_T^{\alpha}v(t)\right|+\left|{}_0D_t^{\alpha}v(t)\right|\left|{}_tD_T^{\alpha}v(t)\right|,\end{aligned}$$

其中

$$m_0=\max_{(\lambda,t)\in[-1,1]\times[0,T]}m_1(|u(t)+\lambda v(t)|).$$

由于 $m_2\in L^1\left([0,T],\mathbf{R}^+\right)$, v 在 $[0,T]$ 连续, 根据注 2, 有

$$|D_\lambda G(\lambda,t)|\leqslant d(t),$$

其中 $d\in L^1\left([0,T],\mathbf{R}^+\right)$. 因此, 莱布尼兹公式是适用的,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\psi(0)=&\int_0^T D_\lambda G(0,t)\mathrm{d}t=\int_0^T\left(D_xL\left(t,u(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)\right),v(t)\right)\mathrm{d}t+\\&\int_0^T\left(D_zL\left(t,u(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)\right),{}_tD_T^{\alpha}v(t)\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

然而

$$\left|D_xL\left(t,u(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)\right|\leqslant m_1(|u(t)|)m_2(t),$$

$$\left|D_yL\left(t,u(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|{}_tD_T^{\alpha}u(t)\right|,$$

$$\left|D_zL\left(t,u(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|{}_0D_t^{\alpha}u(t)\right|,$$

因此, 根据注 2 和 (10) 式,

$$\begin{aligned}\left\langle\varphi'(u),v\right\rangle=&\int_0^T\left(D_xL\left(t,u(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t),v(t)\right)\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\left(D_yL\left(t,u(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t),{}_0D_t^{\alpha}v(t)\right)\right)\mathrm{d}t+\\&\int_0^T\left(D_zL\left(t,u(t),{}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}v(t)\right)\right)\mathrm{d}t\leqslant\\&c_1\|u\|_\infty+c_2\left\|{}_0D_t^{\alpha}v(t)\right\|_{L^2}+c_3\left\|{}_tD_T^{\alpha}v(t)\right\|_{L^2}\leqslant c_1\|u\|_\infty+c_2\|v\|_\alpha+\frac{c_3}{|\cos(\pi\alpha)|}\|v\|_\alpha\leqslant c_4\|v\|_\alpha.\end{aligned}$$

其中, c_1, c_2, c_3 和 c_4 是正常数. 因此, φ 在 u 处有一个由 (16) 式给出的方向导数 $\varphi'(u)\in(E^\alpha)^*$.

(2) 通过 Krasnosel'skii 定理, (18) 和 (19) 式表明映射为 E^α 到 $L^1([0,T],\mathbf{R}^N)\times L^2\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)\times L^2([0,T],\mathbf{R}^N)$ 且定义为

$$u\to\left(D_xL\left(g,u,{}_0D_t^{\alpha}u,{}_tD_T^{\alpha}u\right),D_yL\left(g,u,{}_0D_t^{\alpha}u,{}_tD_T^{\alpha}u\right),D_zL\left(g,u,{}_0D_t^{\alpha}u,{}_tD_T^{\alpha}u\right)\right)$$

是连续的, 因此 φ' 从 E^α 到 $(E^\alpha)^*$ 是连续的. 证毕.

定理 2 设 $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 且 φ 由 (15) 式定义. u 满足 (H_1) 且 $u\in E^\alpha$ 是对应欧拉方程 $\varphi'(u)=0$, 那么 u 是 BVP(12) 的解, 当然, 它对应于 BVP(1) 的解.

证明 根据定理 1, 定义 2, 有

$$0=\langle\varphi'(u),v\rangle=-\int_0^T\frac{1}{2}\left[\left({}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}v(t)\right)+\left({}_tD_T^{\alpha}u(t),{}_0D_t^{\alpha}v(t)\right)\right]\mathrm{d}t-\int_0^T\nabla F(t,u(t),v(t))\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^T\frac{1}{2}\left({}_0^cD_t^{\alpha+1}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right),v'(t)\right)-\frac{1}{2}\left({}_t^cD_T^{\alpha+1}\left({}_tD_T^{\alpha}u(t)\right),v'(t)\right)\mathrm{d}t-\int_0^T\nabla F(t,u(t),v(t))\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

下面定义 $\omega\in C\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 为

$$\omega(t)=\int_0^T\nabla F(t,u(t))\mathrm{d}t,t\in[0,T],$$

使得

$$\int_0^T\left(\omega(t),v'(t)\right)\mathrm{d}t=\int_0^T\left[\int_0^t\left(\nabla F(s,u(s)),v'(t)\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t.$$

根据富比尼定理和 $v(T)=0$, 有

$$\int_0^T\left(\omega(t),v'(t)\right)\mathrm{d}t=\int_0^T\left[\int_0^t\left(\nabla F(s,u(s)),v'(t)\right)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=\int_0^T\nabla F(s,u(s),v(T)-v(s))\mathrm{d}s=$$
$$-\int_0^T\nabla F(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s.$$

因此, 通过 (20) 式, 对于任意 $v\in E^{\alpha}$ 有

$$\int_0^T\left(\frac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha+1}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)-\frac{1}{2}{}_t^cD_T^{\alpha+1}\left({}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)+\omega(t),v'(t)\right)\mathrm{d}t=0. \tag{21}$$

如果 (e_j) 表示 $\mathbf{R}^N$ 的正则基, 我们可以选择 $v\in E^{\alpha}$ 使得

$v(t)=\sin\dfrac{2k\pi t}{T}e_j$ 或 $v(t)=e_j-\cos\dfrac{2k\pi t}{T}e_j$, $k=1,\cdots,N$ 和 $j=1,\cdots,N$.

傅里叶级数理论和 (20) 式表明在 $[0,T]$ 上

$$\frac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)-\frac{1}{2}{}_t^cD_T^{\alpha}\left({}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)+\omega(t)=C,C\in\mathbf{R}^N.$$

根据 $\omega\in C\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 的定义有

$$\frac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)-\frac{1}{2}{}_t^cD_T^{\alpha}\left({}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)=-\int_0^T\nabla F(t,u(t))\mathrm{d}t+C. \tag{22}$$

由于 $\nabla F(\cdot,u(\cdot))\in L^1\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$, 我们确定 (13) 式给出的等价类 $D^{\alpha}(u(t))$ 及其连续表示

$$D^{\alpha}(u(t))=\frac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha+1}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)-\frac{1}{2}{}_t^cD_T^{\alpha+1}\left({}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)=-\int_0^T\nabla F(t,u(t))\,\mathrm{d}t+C. \tag{23}$$

因此, 由 (23) 式和勒贝格理论的一个经典结果可知 $-\nabla F(\cdot,u(\cdot))$ 是 $D^{\alpha}(u(t))$ 在 $[0,T]$ 上的经典导数, 这意味着定义 4 得到了验证.

由于 $u\in E^{\alpha}$ 蕴含着 $u\in AC\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$, 还需要证明 u 满足 BVP(12). 事实上, 根据 (23) 式, 我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D^{\alpha}(u(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha}\left({}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)-\frac{1}{2}{}_t^cD_T^{\alpha}\left({}_tD_T^{\alpha}u(t)\right)\right)=-\nabla F(t,u(t)).$$

此外, $u\in E^{\alpha}$ 蕴含着 $u(0)=u(T)=0$, 因此 (1) 式得到验证, 且定理 1 给出的 φ 是 E^{α} 上的泛函. 证毕.

4 BVP(1) 解的存在性

令 H 是一个实 Banach 空间, $C^1\left(H,\mathbf{R}^N\right)$ 是 Fréchet 可微且其 Fréchet 导数在 H 上连续.

引理 6[22] 设 $\psi\in C^1\left(H,\mathbf{R}^N\right)$. 如果对于任意的点列 $\{u_k\}\subset H$, 由 $\{\psi(u_k)\}$ 有界且 $\psi'(u_k)\to 0$ 可推得点列 $\{u_k\}$ 有收敛子列, 那么称 ψ 满足 Palais-Smale(简记为 P.S.条件).

引理 7[22] 设 H 是一个自反的实 Banach 空间. 如果泛函 $\psi:H\to\mathbf{R}^N$ 是弱下半连续的且是强制的, 即

$\lim\limits_{\|z\|\to\infty}\psi(z)=+\infty$, 那么存在 $z_0\in H$ 使得 $\psi'(z_0)=\inf\limits_{z\in H}\psi(z)$. 进一步, 如果 ψ 是 Fréchet 可微的, 那么 $\psi'(z_0)=0$.

引理 8(山路引理)[22] 设 H 是一个实 Banach 空间, $C^1\left(H,\mathbf{R}^N\right)$ 满足 P.S.条件. 如果:

(i) $\psi(0)=0$;

(ii) 存在 $\rho>0$, $\sigma>0$ 使得对所有的 $z\in H$ 且 $\|z\|=\rho$ 有 $\psi(z)\geqslant\sigma$; 存在 $z_1\in H$, $\|z_1\|\geqslant\rho$ 使得

$$\psi(z_1)<\sigma.$$

那么 ψ 有临界值 $c\geqslant\sigma$. 进一步,

$$c=\inf_{g\in\bar{\Omega}}\max_{z\in g([0,1])}\psi(z),$$

其中 $\bar{\Omega}=\{g\in C([0,1],H):g(0)=0,g(1)=z_1\}$.

首先, 我们利用引理 7 考虑 BVP(1) 解的存在性, 假设条件 (H_1) 满足. 回想一下, 在定理 1 的设置中, 函数 φ 由

$$\varphi(u)=\int_0^T\left[-\frac{1}{2}\left({}_0D_t^\alpha u(t),{}_tD_T^\alpha v(t)\right)-F(t,u(t))\right]\mathrm{d}t$$

给出, 且根据定理 1 知 φ 是连续可微的, 在 E^α 上也是弱下半连续函数.

引理 9　设 $\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$ 且满足假设 (H_1). 如果 $u\in E^\alpha$, 那么泛函 $H:E^\alpha\to\mathbf{R}^N$,

$$H(u)=-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0D_t^\alpha u(t),{}_tD_T^\alpha v(t)\right)\mathrm{d}t,$$

在 E^α 上是凸连续的.

证明　连续性直接从 (13) 式和 $\left(\|u\|_{\alpha,p}=\left\|{}_0D_t^\alpha u\right\|_{L^p}=\left(\int_0^T\left|{}_0D_t^\alpha u\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ 开始. 我们现在可以证明 H 的可凸性.

设 $\lambda\in(0,1)$, $u,v\in E^\alpha$ 和 $\tilde{u},\tilde{v}$ 分别是 u 和 v 在 $R/[0,T]$ 上的零扩展. 由于 Caputo 分数阶导数算子是线性算子, 我们由注释 2 和 (15) 知

$$\begin{aligned}
H((1-\lambda)u+\lambda v)=&-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0D_t^\alpha((1-\lambda)u(t)+\lambda v(t)),{}_tD_T^\alpha((1-\lambda)u(t)+\lambda v(t))\right)\mathrm{d}t=\\
&-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left({}_{-\infty}D_t^\alpha((1-\lambda)\tilde{u}(t)+\lambda\tilde{v}(t)),{}_tD_\infty^\alpha((1-\lambda)\tilde{u}(t)+\lambda\tilde{v}(t))\right)\mathrm{d}t=\\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|{}_{-\infty}D_t^\alpha((1-\lambda)\tilde{u}(t)+\lambda\tilde{v}(t))\right|^2\mathrm{d}t=\\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\lambda)\left|{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)\right|^2+\lambda\left|{}_{-\infty}D_t^\alpha\tilde{v}(t)\right|^2\mathrm{d}t=\\
&\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{1-\lambda}{2}\left({}_{-\infty}D_t^\alpha\tilde{u}(t),{}_tD_\infty^\alpha\tilde{u}(t)\right)-\frac{\lambda}{2}\left({}_{-\infty}D_t^\alpha\tilde{v}(t),{}_tD_\infty^\alpha\tilde{v}(t)\right)\mathrm{d}t=\\
&\int_0^T\left[-\frac{1-\lambda}{2}\left({}_0D_t^\alpha u(t),{}_tD_T^\alpha u(t)\right)-\frac{\lambda}{2}\left({}_0D_t^\alpha v(t),{}_tD_T^\alpha v(t)\right)\right]\mathrm{d}t=(1-\lambda)H(u)+\lambda H(v).
\end{aligned}$$

这意味着 H 是一个定义在 E^α 上的凸泛函. 证毕.

根据以上论证, 如果 φ 是强制的, 且由引理 7 知 φ 有一个最小值, 因此 BVP (1) 是可解的. 它还需要找到 φ 对 E^α 是强制性的条件, 即对于 $u\in E^\alpha$, 有 $\lim\limits_{\|u\|_\alpha\to\infty}\varphi(u)=+\infty$. 我们将看到, 它足以要求 $F(t,x)$ 被一个函数限制.

定理 3　设 $\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$ 且假设 F 满足条件 (H_1). 如果

$$|F(t,x)|\leqslant\bar{a}|x|^2+\bar{b}(t)|x|^{2-\gamma}+\bar{c}(t),t\in[0,T],x\in\mathbf{R}^N,\tag{24}$$

其中, $\bar{a} \in \left[0, \frac{|\cos(\pi\alpha)|\Gamma^2(\alpha+1)}{2T^{2\alpha}}\right)$, $\gamma \in (0,2)$, $\bar{b} \in L^{\frac{2}{\gamma}}([0,T],\mathbf{R})$ 和 $\bar{c} \in L^1([0,T],\mathbf{R})$, 那么 BVP(1) 至少有一个弱解 u.

证明　根据以 $\varphi(u) = \inf\limits_{z\in E^\alpha} \varphi(z)$ 上论证, 我们的问题简化为证明 φ 是强制的.

对于 $u \in E^\alpha$, 由 (14), (24) 式和引理 3 得出

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \int_0^T \left[-\frac{1}{2}\left({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right) - F(t,u(t))\right]\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^T \left({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t - \int_0^T F(t,u(t))\,\mathrm{d}t \geqslant \\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\int_0^T \left|{}_0D_t^\alpha u(t)\right|^2 \mathrm{d}t - \bar{a}\int_0^T |u(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \bar{b}(t)|u(t)|^{2-\gamma}\mathrm{d}t + \int_0^T \bar{c}(t)\,\mathrm{d}t = \\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\|u\|_\alpha^2 - \bar{a}\|u\|_{L^2}^2 - \int_0^T \bar{b}|u(t)|^{2-\gamma}\mathrm{d}t - \bar{c_1} \geqslant \\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\|u\|_\alpha^2 - \bar{a}\|u\|_{L^2}^2 - \left(\int_0^T \left|\bar{b}(t)\right|^{\frac{2}{\gamma}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\int_0^T |u(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1-\frac{\gamma}{2}} - \bar{c_1} = \\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\|u\|_\alpha^2 - \bar{a}\|u\|_{L^2}^2 - b_1\|u\|_{L^2}^{2-\gamma} - \bar{c_1} \geqslant \\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\|u\|_\alpha^2 - \frac{\bar{a}T^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)}\|u\|_\alpha^2 - \bar{b_1}\left(\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{2-\gamma}\|u\|_\alpha^{2-\gamma} - \bar{c_1} = \\
&\left(\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2} - \frac{\bar{a}T^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)}\right)\|u\|_\alpha^2 - \bar{b_1}\left(\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{2-\gamma}\|u\|_\alpha^{2-\gamma} - \bar{c_1}.
\end{aligned}$$

其中 $\bar{b_1} = \left(\int_0^T \left|\bar{b}(t)\right|^{\frac{2}{\gamma}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{\gamma}{2}}$ 和 $\bar{c_1} = \int_0^T \bar{c}(t)\,\mathrm{d}t$.

注意到 $\bar{a} \in \left[0, \frac{|\cos(\pi\alpha)|\Gamma^2(\alpha+1)}{2T^{2\alpha}}\right)$ 和 $\gamma \in (0,2)$, 我们有 $\|u\|_\alpha \to \infty$ 时 $\varphi(u) \to +\infty$, 即 φ 是强制的. 证毕.

我们现在的任务是使用引理 8(山路引理)来找到 E^α 上函数 φ 的一个非零解.

定理 4　设 $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 且 F 满足条件 (H_1). 如果下述假设满足:

(H_2) $F \in C\left([0,T]\times\mathbf{R}^N, \mathbf{R}\right)$ 且存在 $\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $M > 0$ 使得对所有的 $t \in [0,T]$ 以及 $x \in \mathbf{R}^N$, $|x| \geqslant M$, 有 $0 < F(t,x) \leqslant \mu(\nabla F(t,x), x)$;

(H_3) $\limsup\limits_{|x|\to 0} \frac{F(t,x)}{|x|^2} < \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{2T^{2\alpha}}$ 对 $t \in [0,T]$ 一致成立.

那么 BVP (1) 在 E^α 上至少有一个非零解.

证明　我们将验证 φ 满足引理 8 的所有条件.

首先, 我们将证明 φ 满足 P.S.条件. 因为 $F(t,x) - \mu(\nabla F(t,x), x)$ 对于 $t \in [0,T]$ 和 $|x| \leqslant M$ 是连续的, 因此存在 $c \in R^+$, 使得

$$F(t,x) \leqslant \mu(\nabla F(t,x), x) + c, t \in [0,T], |x| \leqslant M.$$

通过假设 (H_2), 我们得到

$$F(t,x) \leqslant \mu(\nabla F(t,x), x) + c, t \in [0,T], x \in \mathbf{R}^N. \tag{25}$$

令 $\{u_k\} \subset E^\alpha$, $|\varphi(u_k)| \leqslant K, k = 1,2,\cdots, \varphi'(u_k) \to 0$. 注意到

$$\left\langle \varphi'(u_k), u_k \right\rangle = -\int_0^T \left[\left({}_0D_t^\alpha u_k(t), {}_tD_T^\alpha u_k(t)\right) + (\nabla F(t,u_k(t)), u_k(t))\right]\mathrm{d}t. \tag{26}$$

结合 (25), (26) 和 (14) 式可得

$$\begin{aligned}K\geqslant\varphi(u_k)=&-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0D_t^\alpha u_k(t),{}_tD_T^\alpha u_k(t)\right)\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,u_k(t))\mathrm{d}t\geqslant\\&-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0D_t^\alpha u_k(t),{}_tD_T^\alpha u_k(t)\right)\mathrm{d}t-\mu\int_0^T(\nabla F(t,u_k(t)),u_k(t))\mathrm{d}t-cT=\\&\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\int_0^T\left({}_0D_t^\alpha u_k(t),{}_tD_T^\alpha u_k(t)\right)\mathrm{d}t-\mu\left\langle\varphi'(u_k),u_k\right\rangle-cT\geqslant\\&\left(\frac{1}{2}-\mu\right)|\cos(\pi\alpha)|\,\|u_k\|_\alpha^2-\mu\left|\varphi'(u_k)\right|\|u_k\|_\alpha-cT,k=1,2,\cdots,N.\end{aligned}$$

因为 $\varphi'(u_k)\to 0$, 故存在 $N_0\in\mathbf{N}$ 使得

$$K\geqslant\left(\frac{1}{2}-\mu\right)|\cos(\pi\alpha)|\,\|u_k\|_\alpha^2-\|u_k\|_\alpha-cT,k>N_0.$$

这蕴含着 $\{u_k\}\subset E^\alpha$ 是有界的. 因为 E^α 是自反空间, 如果必要的话取其子列, 我们可以假设 $u_k\to u$ 在 E^α 中, 因此 $k\to\infty$ 时有

$$\left\langle\varphi'(u_k)-\varphi'(u),u_k-u\right\rangle=\left\langle\varphi'(u_k),u_k-u\right\rangle-\left\langle\varphi'(u),u_k-u\right\rangle\leqslant\left\|\varphi'(u_k)\right\|_\alpha\|u_k-u\|_\alpha-\left\langle\varphi'(u),u_k-u\right\rangle\to 0.\tag{27}$$

进一步, 根据 (10) 式和引理 4 知 $\{u_k\}$ 在空间 $C\left([0,T],\mathbf{R}^N\right)$ 中有界且 $k\to\infty$ 时 $\|u_k-u\|_\infty=0$. 因此,

$$\int_0^T\nabla F(t,u_k(t))\,\mathrm{d}t\to\int_0^T\nabla F(t,u(t))\,\mathrm{d}t.\tag{28}$$

注意到

$$\begin{aligned}\left\langle\varphi'(u_k)-\varphi'(u),u_k-u\right\rangle=&-\int_0^T\left({}_0D_t^\alpha(u_k(t)-u(t)),{}_tD_T^\alpha(u_k(t)-u(t))\right)\mathrm{d}t-\\&\int_0^T(\nabla F(t,u_k(t))-\nabla F(t,u(t)))(u_k(t)-u(t))\,\mathrm{d}t\geqslant\\&|\cos(\pi\alpha)|\,\|u_k-u\|_\alpha^2-\left|\int_0^T(\nabla F(t,u_k(t))-\nabla F(t,u(t)))\,\mathrm{d}t\right|\|u_k-u\|_\infty.\end{aligned}$$

结合式 (27) 和 (28) 式, 容易验证 $k\to\infty$ 时 $\|u_k-u\|_\alpha^2\to 0$, 因此在 E^α 中 $u_k\to u$, 从而 φ 满足 P.S.条件.

由 $\limsup\limits_{|x|\to 0}\dfrac{F(t,x)}{|x|^2}<\dfrac{\Gamma^2(\alpha+1)}{2T^{2\alpha}}$ 对 $t\in[0,T]$ 一致成立知, 存在 $\varepsilon\in(0,1)$ 以及 $\delta>0$ 使得对所有的 $t\in[0,T]$ 以及 $x\in\mathbf{R}^N$, $|x|\leqslant\delta$, 有 $F(t,x)\leqslant\dfrac{(1-\varepsilon)\Gamma^2(\alpha+1)|x|^2}{2T^{2\alpha}}$.

令 $\rho=\dfrac{\Gamma(\alpha)\left(\dfrac{\alpha-1}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}}}{T^{\alpha-\frac{1}{2}}}$, $\sigma=\dfrac{\varepsilon\rho^2}{2}>0$, 则由 (10) 式可得, 对于所有的 $u\in E^\alpha$ 以及 $\|u\|_\alpha=\rho$ 有

$$\|u\|_\infty\leqslant\frac{T^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)/2+1)^{\frac{1}{2}}}\|u\|_\alpha=\delta,$$

因此有

$$\begin{aligned}\varphi(u)=&-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0D_t^\alpha u(t),{}_tD_T^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t\geqslant\\&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\|u\|_\alpha^2-(|\cos(\pi\alpha)|-\varepsilon)\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{2T^{2\alpha}}\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant\\&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\|u\|_\alpha^2-\frac{1}{2}(|\cos(\pi\alpha)|-\varepsilon)\|u\|_\alpha^2=\frac{1}{2}\varepsilon\|u\|_\alpha^2=\sigma.\end{aligned}$$

即引理 8(山路引理) 的条件 (ii) 成立.

显然, 由 φ 的定义以及 (H_3) 可知 $\varphi(0)=0$.下证 φ 满足引理 8(山路引理) 的条件 (iii).

因为对所有的 $t\in[0,T]$ 以及 $x\in\mathbf{R}^N$, $|x|\geqslant M$ 有 $0<F(t,x)\leqslant\mu(\nabla F(t,x),x)$, 简单的正则化讨论可知存在 $r_1,r_2>0$, 使得

$$F(t,x)\geqslant r_1|x|^{\frac{1}{\mu}}-r_2,x\in\mathbf{R}^N,t\in[0,T].$$

对任意的 $u \in E^{\alpha}$, $\mu \neq 0$, $k > 0$, 注意到 $\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 和 (13) 式, 有

$$\varphi(ku) = -\frac{1}{2}\int_0^T \left({}_0D_t^{\alpha}ku(t), {}_tD_T^{\alpha}ku(t)\right)\mathrm{d}t - \int_0^T F(t, ku(t))\mathrm{d}t \leqslant \frac{k^2}{2|\cos(\pi\alpha)|}\|u\|_{\alpha}^2 - r_1\int_0^T |ku(t)|^{\frac{1}{\mu}}\mathrm{d}t + r_2T = \frac{k^2}{2|\cos(\pi\alpha)|}\|u\|_{\alpha}^2 - r_1k^{\frac{1}{\mu}}\|u\|_{L^{\frac{1}{\mu}}}^{\frac{1}{\mu}} + r_2T \to -\infty, (k \to \infty).$$

因此, 存在充分大的 k_0 使得 $\varphi(k_0u) \leqslant 0$, 故引理 8(山路引理) 的条件 (iii) 满足.

最后, 注意到 $\varphi(0) = 0$, 而临界点 u 满足 $\varphi(u) \geqslant \sigma > 0$, 因此 u 是 BVP (1) 的一个非平凡弱解. 证毕.

参考文献:

[1] Diethelm K, Freed A D. On the solution of nonlinear fractional-order differential equations used in the modeling of viscoplasticity[M]// Scientific Computing in Chemical Engineering Ⅱ. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999. DOI: 10.1007/978-3-642-60185-9_24.

[2] Lundstrom B N, Higgs M H, Spain W J, et al. Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons[J]. Nature Neuroscience, 2008, 11(11): 1 335-1 342. DOI: 10.1038/nn.2212.

[3] Glöckle W G, Nonnenmacher T F. A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics[J]. Biophysical Journal, 1995, 68(1): 46-53. DOI: 10.1016/S0006-3495(95)80157-8.

[4] Bengrine M, Dahmani Z. Boundary value problems for fractional differential equations[J]. International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics, 2012, 5(4): 7-15. DOI: 10.12816/0006134.

[5] Zhao Y, Sun S R, Han Z L, et al. The existence of multiple positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(4): 2 086-2 097. DOI: 10.1016/j.cnsns.2010.08.017.

[6] Feng W Q, Sun S, Han Z, et al. Existence of solutions for a singular system of nonlinear fractional differential equations[J]. Computers Mathematics with Applications, 2011, 62(3): 1 370-1 378. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.03.076.

[7] Zhang X G, Liu L S, Wu Y H. Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbed term[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2012, 55(3/4): 1 263-1 274. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.10.006.

[8] Benson D A, Schumer R, Meerschaert M M, et al. Fractional dispersion, Lévy motion and the MADE tracer test[J]. Transport in Porous Media, 2001, 42(1/2): 211-240. DOI: 10.1023/A:1006733002131.

[9] 杨帅, 蔡宁宁. 一类 Caputo 分数阶微分方程初值问题解的存在性[J]. 山东理工大学学报 (自然科学版), 2016, 30(3): 33-36. DOI: 10.3969/j.issn.1672-6197.2016.03.007.
Yang S, Cai N N. Existence of initial value problems for a class of caputo fractional differential equations[J]. Journal of Shandong University of Technology (Natural Science Edition), 2016, 30(3): 33-36.

[10] Ricceri B. A general variational principle and some of its applications[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 113(1/2): 401-410. DOI: 10.1016/S0377-0427(99)00269-1.

[11] Kilbas A A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 2006. DOI: 10.1016/S0304-0208(06)80001-0.

[12] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. New York: Wiley, 1993.

[13] 吴亚斌, 周文学, 宋学瑶. 带 p-Laplacian 算子的半线性分数阶脉冲微分方程解的存在性与唯一性[J]. 云南大学学报 (自然科学版), 2023, 45(1): 9-17. DOI: 10.7540/j.ynu.20220250.
Wu Y B, Zhou W X, Song X Y. Existence and uniqueness of solutions for semilinear fractional impulse differential equations with p-Laplacian operators[J]. Journal of Yunnan University (Natural Sciences Edition), 2023, 45(1): 9-17.

[14] Wang J R, Zhou Y. A class of fractional evolution equations and optimal controls[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(1): 262-272. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2010.06.013.

[15] Fix G J, Roof J P. Least squares finite-element solution of a fractional order two-point boundary value problem[J]. Computers Mathematics with Applications, 2004, 48(7/8): 1 017-1 033. DOI: 10.1016/j.camwa.2004.10.003.

[16] Ervin V J, Roop J P. Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 2006, 22(3): 558-576. DOI: 10.1002/num.20112.

[17] Jiao F, Zhou Y. Existence results for fractional boundary value problem via critical point theory[J]. International Journal of

Bifurcation and Chaos, 2012, 22(4): 368-224. DOI: 10.1142/S0218127412500861.
[18] Bai C Z. Infinitely many solutions for a perturbed nonlinear fractional boundary-value problem[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2013, 2013(136): 1 150-1 164. DOI: 10.1186/1687-1812-2013-161.
[19] Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[M]. Providence: American Mathematical Society, 1986.
[20] Li F Y, Liang Z P, Zhang Q. Existence of solutions to a class of nonlinear second order two-point boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 312(1): 357-373. DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.03.043.
[21] Corvellec J N, Motreanu V V, Saccon C. Doubly resonant semilinear elliptic problems via nonsmooth critical point theory[J]. Journal of Differential Equations, 2010, 248(8): 2 064-2 091. DOI: 10.1016/j.jde.2009.11.005.
[22] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.
Bai Z B. Theory and application of fractional differential equation boundary value problem[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2013.
[23] Adams R A. Sobolev spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.
[24] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. New York: Springer Science Business Media, 2013.

The variational method is used to study the existence of solutions to boundary value problems for a class of fractional differential equations

LI Wenbo，ZHOU Wenxue**，WU Yabin，ZHANG Min
(College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: A sufficient condition for the existence of the solution of a boundary value problem for a class of fractional-order differential equations is established by using the variational method. Then the problem is reduced to an equivalent integral form so that the solution of the boundary value problem is defined as the critical point of the corresponding functional. Finally, the existence of the solution to the boundary value problem is established by using the mountain road lemma.

Key words: critical point theory; variational method; boundary value problem; gradient