云南大学学报（自然科学版），2007，29（5）：438~442　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

模丛之间的浸入关系[①]

张飞军，张军亮
(陕西师范大学 数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062)

摘要: 利用张量和模代数知识, 构造出了自由丛的浸入子丛和任一模丛的浸入子自由丛. 得到一般模丛都能够成为一个自由丛的浸入子丛; 同时任一模丛也能够有一自由丛(或投射丛)是它的浸入子丛; 还给出了投射丛转化为自由丛的条件.

关键词: 纤维丛; 模丛; 浸入子丛; 图表可换
中图分类号: O 189.3　　文献标识码: A　　文章编号: 0258－7971(2007)05－0438－05

纤维丛是(以底空间)一族参数化的某种模型对象, 它是当代数学和物理学最为常用的概念之一. 对于微分流形的拓扑学和几何学, 它更处于中心地位. 由于纤维丛的结构复杂(由丛空间、射影、底空间、纤维型、变换群等构成), 且所用的5个概念结构各自变化多, 不易统一. 但一般的纤维丛其底空间较多取作是一般微分流形或多面体, 而纤维型是各式各样的, 如熟知的、广泛使用的向量丛, 纤维型是向量空间. 虽然向量丛[1]在物理学方面表达规范场有很大的作用, 然而在概念上更令数学研究者感兴趣的处理法是把视野打开一些.

如在文献[2]中讨论了一种高度螺旋纤维丛, 局部上看像是一丛直线束, 它与底的任一横截面切割成一个康托型集; 在文献[3,4]又给出了Buchsbaum丛、辛几何上的标架丛等. 不管是什么样的纤维丛, 丛理论的中心问题是要指出结构变化时, 其示性类的区别有多大, 也就是丛映射的结果如何. 因此有很多研究丛映射的文章, 如文献[2]利用Postnikov分解理论讨论了一类纤维丛偶之间丛映射的存在性; 文献[5]讨论了丛的广义联络映射; 文献[6]讨论了模丛, 这将使对模空间所作的一些构造能移到模丛上来, 其结果是可以在模丛之间建立一种同调理论. 由此讨论模丛之间的丛映射也是尤为重要的. 本文就是在文献[6]的基础上进一步讨论丛之间的浸入关系, 使一般模丛都能够成为一个自由丛的浸入子丛, 同时任意模丛也能有一个自由丛(或投射丛)是它的浸入子丛, 从而可使讨论模丛内在局部结构变得较为简单.

定义 1[7]　设 M_i 为 $n_i(i=1,2)$ 维 C^r 流形. 如果 $C^k(1\leqslant k\leqslant r)$ 映射 $f: M_1\to M_2$ 对任何 $p\in M_1$, 有 $(\mathrm{rank}f)_p=n_1$ (因而 $n_1\leqslant n_2$), 则称 f 为一个 C^k 浸入.

定义 2　若 $\xi=(E,\pi,M,V,G)$, $\eta=(E',\pi',M,V',G')$ 是 $R-$ 模丛, 如果存在丛映射 ϕ, 使 $\forall x\in M$, 纤维映射

$$\phi|_x:\pi^{-1}(x)\to(\pi')^{-1}(x)$$

都是 $R-$ 单模同态, 则称 ϕ 是丛 ξ 在丛 η 中的浸入, 或称丛 ξ 是丛 η 的浸入子丛.

注 1　由于纤维丛是流形, 故设 (U,x^i) 是点 $x\in M$ 在底空间上的局部坐标系, 同时可设 $(\pi^{-1}(U), y^i)$, $((\pi')^{-1}(U),z^i)$ 分别是底空间上包含点 x 的丛 ξ, η 上的局部坐标系. 由丛定义知: $\pi^{-1}(x)$ 与 $\{x\}\times V$ 同构, $(\pi')^{-1}(x)$ 与 $\{x\}\times V'$ 同构, 纤维映射为

$$\phi|_x:\pi^{-1}(x)\to(\pi')^{-1}(x).$$

由同构及丛局部映射图可换知, 对任意点 $p\in\pi^{-1}(x)$ 的坐标 $y^i(p)$ 表示为 (x^i,v), 其中 $v\in V$. 同理可

① 收稿日期: 2006－11－12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571115).
作者简介: 张飞军(1965－　), 男, 陕西人, 副教授, 博士生, 主要从事现代微分几何学方面的研究.

将 $\psi(p)$ 的坐标 $z^i(\psi(p))$ 表示为 (x^i, v'), 其中 $v' = \psi(v) \in V'$.

考察丛映射 ψ 的秩 $\mathrm{rank}(\psi)_p = \mathrm{rank}D(z^i\circ\psi\circ(y^i)^{-1})_{y^i(p)}$, 其中 $D(z^i\circ\psi\circ(y^i)^{-1})$ 表示 $z^i\circ\psi\circ(y^i)^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵. 因为 $(z^i\circ\psi\circ(y^i)^{-1})(x^i, v) = (z^i\circ\psi\circ(y^i)^{-1})(y^i(p)) = z^i(\psi(p)) = (x^i, v')$, 所以

$$D(z^i\circ\psi\circ(y^i)^{-1})_{y^i(p)} = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^i}\right)_{y^i(p)} = \frac{\partial(x^i, v')}{\partial(x^i, v)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial v'}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

若模同态

$$\psi: \pi^{-1}(x) \to (\pi')^{-1}(x)$$

的秩 $\mathrm{rank}\left(\dfrac{\partial v'}{\partial v}\right)$ 有限, 则 $\mathrm{rank}(D(z^i\circ\psi\circ(y^i)^{-1})_{y^i(p)})$ 就等于丛 ξ 的维数, 因此定义 2 是定义 1 的合理推广.

定义 3　模丛 $\xi = (E, \pi, M, V, G)$, 若纤维型 V 是 R - 自由模, 则称 ξ 为自由丛; 若 V 是 R - 投射模, 则称 ξ 为投射丛.

注 2　以上环 R 是酉环. 以下讨论的丛是指具有相同的底空间和相同的酉环.

由模丛定义知, $\forall x \in M$, 纤维 $V_x = \pi^{-1}(x)$ 与纤维型 V 同构, 故自由丛、投射丛的纤维也分别是自由模、投射模. 由此, 自由丛是投射丛, 但投射丛不一定是自由丛.

1　定理和证明

定理 1　单模丛[8] 可以是任一模丛的浸入子丛.

证明　$\xi = (E, \pi, M, V, G)$ 是 R - 单模丛, $\eta = (E', \pi', M, V', G')$ 是任意 R - 模丛. 如果存在单丛映射 ψ, 使映射图

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

可换, 则说明 ξ 可以浸入到 η 中.

模丛映射须满足局部 trivial, 故 $\forall x \in M$, ξ 的纤维 $\pi^{-1}(x)$ 是 R - 单纯模, η 的纤维 $(\pi')^{-1}(x)$ 是 R - 模. 于是存在单模同态(而且是嵌入映射)

$$\varphi_x: \pi^{-1}(x) \to (\pi')^{-1}(x).$$

令 $\psi: E \to E'$, 使满足: $\forall y \in E$(存在 $x \in M$, 使 $y \in \pi^{-1}(x)$) 有

$$\psi(y) = \varphi_x(y) \in (\pi')^{-1}(x) \subset E'.$$

所以 ψ 是单丛映射, 而且还有

$$\pi'\circ\psi(y) = \pi'(\varphi_x(y)) = x,\ \pi(y) = x,$$

即有 $\pi'\circ\psi = \pi$. 证毕.

特别地, 若 ξ, η 的纤维型 V、V' 之间给定一拓扑变换, 那么这样的浸入就是一个嵌入. 以下讨论的问题都有如此类似的结论.

定理 2　对任意投射丛都存在一自由丛, 使投射丛是该自由丛的浸入子丛.

证明　设 $\xi = (E, \pi, M, V, G)$ 是一投射丛, 则 $\forall x \in M$ 有 $\pi^{-1}(x)(= \pi_x^{-1})$ 和 V 都是 R - 投射模. 由投射模的等价定义知, 存在自由模 V_x, 使 $V_x = \pi_x^{-1} \oplus S_x$.

于是令

$$E' = \bigcup_{x\in M}(\pi_x^{-1} \oplus S_x),\quad \pi' = \pi\circ p_1: E' \to M,$$

其中 p_1 是直和 $\pi_x^{-1} \oplus S_x$ 的第一投射, 由此规定的 π' 是满射, 通过 (E', π', M) 可以构造一自由丛.

假定 E 的流形结构是 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\forall x \in M$, 存在坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 即 U_α 是 x 的开邻域,

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times V \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

为一同胚映射, 则有

$$\varphi_\alpha|_x:\{x\}\times V\to\pi^{-1}(x)$$

为模同构. 由文献[3] 顺其自然的想法是扩充 $\varphi_\alpha|_x$ 为 $\varphi'_\alpha|_x$, 使

$$\varphi'_\alpha|_x:\{x\}\times V\to\pi^{-1}(x)\oplus S_x.$$

由于 V 是投射模, 规定

$$(x,a)+(x,b)=(x,a+b),\ \forall a,b\in V,$$

则$\{x\}\times V$ 也是投射模, 由投射模性质可知, 存在 $\varphi'_\alpha|_x$, 使映射图

$$\begin{tikzcd} & \{x\}\times V \arrow[dl, "\varphi'_\alpha|_x"'] \arrow[d, "\varphi_\alpha|_x"] \\ \pi^{-1}(x)\oplus S_x \arrow[r, "p_1"] & \pi^{-1}(x) \end{tikzcd}$$

可换, 即有 $\varphi_\alpha|_x=p_1\circ\varphi'_\alpha|_x$.

由同胚 $\varphi_\alpha|_x$ 可说明$\varphi'_\alpha|_x$ 是单射, 但不能说明 $\varphi'_\alpha|_x$ 是满射, 故也就无法得到它是同胚, 因此这样的构造自由丛是行不通的. 以下我们寻找一种新的构造丛方法.

令 $x,y\in M$, 则有自由模 $V_x=\pi^{-1}(x)\oplus S_x$, $V_y=\pi^{-1}(y)\oplus S_y$, 其中 $\pi^{-1}(x)$, $\pi^{-1}(y)$ 都与 V 同胚(即线性同构), 所以有 $\pi^{-1}(x)\cong\pi^{-1}(y)$, 且 $\pi^{-1}(x)$, $\pi^{-1}(y)$ 为投射模, 则有自由模 B 及满同态f,f' 使

$$f:B\to\pi^{-1}(x),\ f':B\to\pi^{-1}(y).$$

取$A=\ker f$, $A'=\ker f'$, 则得短正合列

$$A\to B\xrightarrow{f}\pi^{-1}(x),$$
$$A'\to B\xrightarrow{f'}\pi^{-1}(y).$$

因为 $\pi^{-1}(x)\cong\pi^{-1}(y)$, 所以$A\cong A'$. 由上面短正合列可得, 存在 $C'\cong\pi^{-1}(x)\cong\pi^{-1}(y)$, 使

$$B=A\oplus C'\cong A\oplus\pi^{-1}(y)=\pi^{-1}(y)\oplus S_y=V_y.$$

所以 $V_x\cong V_y$. 在 M 上取定一点其自由模记为V', 显然 V' 为R 上模且 $V'\cong V_x\cong V_y$, 将此作为丛(E',π',M) 的纤维型, 由此定义

$$\varphi'_\alpha: U_\alpha\times V'\to(\pi')^{-1}(U_\alpha),$$

使

$$\varphi'_\alpha|_x:\{x\}\times V'\to\pi^{-1}(x)\oplus S_x,$$

故 $\varphi'_\alpha|_x$ 为一个模同构, 因此

$$\varphi'_\alpha: U_\alpha\times V'\to(\pi')^{-1}(U_\alpha)$$

为一同胚映射.

考虑 E' 的子集族

$$\Phi=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\{\varphi'_\alpha(W): W\text{ 是 }U_\alpha\times V'\text{ 中任意的开子集}\}.$$

容易验证 Φ是E' 的一个拓扑基, 有了拓扑基仿照切矢量丛的构造方法就能自然得到 E' 的流形结构.

由此找到自由丛(E',π',M,V',G'), $\forall x\in M$, 丛映射

$$\psi: E\to E'$$

的纤维映射

$$\psi|_x:\pi^{-1}(x)\to(\pi')^{-1}(x)=\pi^{-1}(x)\oplus S_x$$

都是R - 单模同态, 所以自由丛(E',π',M,V',G') 为给定投射丛(E,π,M,V,G) 的浸入自由丛. 证毕.

根据定理 2 给定底空间 M 及任一点$x\in M$ 的纤维找丛的方法, 又可得到下面推论 1.

推论 1 设(E',p,M) 为任一模丛, 则它有一个自由丛(E,π,M), 能使丛映射

$$f: E\to E'$$

为满射, 即

$$f_x: \pi^{-1}(x) \to p^{-1}(x),\ \forall x \in M,$$

为满同态, 并且映射图

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "p"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

可换, 即任一模丛都存在一自由丛使它是该自由丛的浸入子丛.

由于自由丛是投射丛, 所以推论 1 中“自由丛” 改为“投射丛” 也成立.

推论 1 说明对任一模丛, 都可以浸入到某一自由丛(或投射丛) 中, 当然任一模丛都不可能嵌入某一自由丛中, 否则任一模丛就都只有自由丛的特性了. 但我们有如下更进一步的结论.

定理 3　设 $\xi = (E, \pi, M, V, G)$ 是任意 $R-$ 模丛, 若存在自由 $R-$ 模 A, 使

$$\varphi: V \to A$$

是满同态, 则存在一自由丛 $\eta = (E', \pi', M, A, G')$ 是 ξ 的浸入子丛.

证明　因为 $\varphi: V \to A$ 是满同态, 且 A 是自由 $R-$ 模, 不妨设 Y 是 A 的基, 对每个 $b \in Y \subset A$ 选定一个 $a_b \in V$, 使 $\varphi(a_b) = b$. 映射

$$\varphi': A \to V$$

定义为

$$\varphi'(\sum br) = \sum a_b r \in V,\ 其中\ r \in R.$$

则 φ' 是一个 $R-$ 模同态. 取 $R-$ 模 $B = Im(\varphi')$, 则

$$\varphi': A \to B \subset V$$

是一个 $R-$ 模同构, 且 B 也是自由 $R-$ 模, $V = B \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$. 按照定理 2 的方法可以构造一自由丛 $\eta = (E', \pi', M, B, G')$.

对任意 $x \in M$, 由于 $(\pi')^{-1}(x) \cong B$, $\pi^{-1}(x) \cong V = B \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$, 不妨设它们的模同构分别为 σ_1, σ_2. 所以可构造自然的丛映射

$$\psi: E' \to E,$$

使 $\forall x \in M$, $\psi_x: (\pi')^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$ 满足

$$\sigma_2 \circ \psi_x \circ \sigma_1^{-1}: B \to V = B \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$$

是对 V 的第一投射, 因此 ψ_x 是单同态, 则丛 η 是丛 ξ 的浸入子丛. 证毕.

在定理 3 中有“若存在自由 $R-$ 模 A, 使 $\varphi: V \to A$ 是满同态” 的条件限制, 但熟知这样的自由 $R-$ 模 A 是很多的, 如选取模 V 中适当元素作为模 A 的基, 显然有满同态 $\varphi: V \to A$ 存在. 根据需要可以取不同的满同态, 因此这样的条件限制对定理 3 的成立并不严格.

有了推论 1 和定理 3, 今后研究模丛就可转化为研究与其相关的自由丛(或投射丛), 而自由丛的许多性质和矢量丛有相似之处, 如此可使复杂问题简单化.

自由丛是投射丛, 但投射丛不一定是自由丛. 下面给出投射丛是自由丛的一个充分条件.

定理 4　设 $\xi = (E, \pi, M, V, G)$ 是 $R-$ 投射丛, 若 R 是整数环, 则 ξ 是自由丛.

因为纤维型 V 是整数环 R 上的投射模, 由模论知整数环 R 上的投射模是自由模, 因此 V 是 R 上自由模, 则 ξ 是自由丛. 故整数环上的投射丛和自由丛是等价的.

2　相关结论

最后给出与模丛映射正合有关的 2 个有趣定理, 作为本文的结束.

向量丛上的正合讨论过可裂条件, 对特殊的模丛 —— 投射丛也可得到更广范围的正合列的可裂性.

定理 5　设 $\xi = (E, \pi, M)$ 为一投射丛, 则以 ξ 为第 3 项的短正合列都可裂, 即若存在模丛 (E_1, p_1, M), (E_2, p_2, M), 使 $E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E$ 为短正合列, 则这个短正合列必可裂.

证明 $\forall x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ 为投射模. 由投射模定义知, 若 $\sigma \in \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(x), A)$, 对任何满同态 $\tau \in \mathrm{Hom}(B, A)$, 恒有同态 $f \in \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(x), B)$, 使 $\tau \circ f = \sigma$, 即有映射图

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(x) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\sigma"] \\ B \arrow[r, "\tau"] & A \end{tikzcd},$$

交换. 特别地取

$$A = \pi^{-1}(x),\ \sigma = \mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(x)),$$
$$B = p_2^{-1}(x),\ \tau = f_2|_{p_2^{-1}(x)} \in \mathrm{Hom}(p_2^{-1}(x), \pi^{-1}(x)),$$

则有映射图

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(x) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "id"] \\ p_2^{-1}(x) \arrow[r, "\tau"] & \pi^{-1}(x) \end{tikzcd}$$

交换, 即有同态 $f \in \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(x), p_2^{-1}(x))$, 使 $\tau \circ f = id$, 所以短正合列右可裂.

对于模范畴, 任意单边可裂的短正合列必定是双边可裂的, 因此命题得证. 证毕.

定理 6 对任一模丛 (E, π, M), 可以得到一个投射分解 $\{\xi_n, f_n\}$:

$$\cdots \to E_n \xrightarrow{f_n} E_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{f_2} E_1 \xrightarrow{f_1} E,$$

其中 $\xi_n = (E_n, p_n, M)$ 是投射丛, 每一 f_n 是满射, 且有 $f_n \circ f_{n+1} = 0$.

证明 由于每一个丛 (E, π, M) 都有一个投射丛 (E_1, p_1, M) 且 f_1 是满射, 由文献[9] 中的方法可以作一短模丛正合列

$$(N_1, \pi_1, M) \xrightarrow{i} (E_1, p_1, M) \xrightarrow{f_1} (E, \pi, M),$$

其中 i 是典型包含同态, 对于丛 (N_1, π_1, M) 也同样有一个短正合列

$$(N_2, \pi_2, M) \xrightarrow{i} (E_2, p_2, M) \xrightarrow{f_2} (N_1, \pi_1, M),$$

即得

$$(N_2, \pi_2, M) \xrightarrow{i} (E_2, p_2, M) \xrightarrow{f_2} (E_1, p_1, M) \xrightarrow{f_1} (E, \pi, M),$$

且有 $f_1 \circ f_2 = 0$. 继续如此作法, 即得所需结论, 并且它们构成一个复形. 证毕.

参考文献:

[1] 肖学雷. 时空背景的微分几何表征[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 24(6): 33-35.

[2] 武宝亭. 高度螺旋纤维丛的机理研究[J]. 数学的实践与研究, 1997, 27(2): 148-152.

[3] 古志鸣. 一类丛映射的存在性[J]. 中国科学(A 辑), 2001, 31(6): 517-522.

[4] CHANG Mei-chun. Some remarks on Buchsbaum bundles[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 152(1-3): 49-55.

[5] LAWSON J K. A frame bundle generalization of multisymplectic geometries[J]. Reports on Mathematical Physics Volume, 2000, 45(2): 183-205.

[6] 张飞军. 自由丛、投射丛与一般模丛的浸入性[J]. 工程数学学报, 2004, 21(3): 248-250.

[7] DALE Husemoller. Fibre Bundles[M]. 2nd Edition. New York Heidelberg Berlin: Springer-verlag, 1975.

[8] BOECKX E, VANHECKE L. Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles[J]. Differential Geometry and its Applications, 2000, 13(1): 77-93.

[9] CANTRIJN F, LANGEROCK B. Generalised connections over a vector bundle map[J]. Differential Geometry and its Applications, 2003, 18(3): 295-317.

(下转第 448 页)

参考文献:

[1] CHANG Tong, HSIAO Ling. The Riemann problem and interaction of waves in gas dynamics[M]. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 41. New York: Longman Scientific & Technical, 1989.

[2] LI Ta- tisen. Global classical solution for quasilinear hyperbolic systems[M]. Research in Applied Mathematics, New York: John Wiley & Sons, 1994.

[3] 李大潜, 赵彦淳. 一维等熵流气体动力学组的真空问题[J]. 数学季刊, 1986, 1(1): 41-46.

[4] 林龙威. 论均熵流气体动力学方程组的真空状态[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1984, 5(2): 1-4.

[5] LIU Tai-ping, SMOLLER J. On the Vacuum state for isentropic gas dynamics equations[J]. Advances in Math, 1980, 1: 345-359.

[6] 孙文华, 杨汉春. 一类耦合的双曲守恒律系统的柯西问题[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 26(1): 6-10.

[7] SMOLLER J. Shock waves and reaction-diffusion equations[M]. 2nd Edition. Bolin: Springer-Verlag, 1994.

[8] LI Ta-tisen, YU Wen-ci. Boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems[M]. Durham: Duke University Mathematics Series V, 1985.

Interaction between two rarefaction waves for gas dynamic isentropic equatins

ZHANG Tong, GU Ying-li, YANG Han-chun

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: The interaction between forward and backward centred rarefaction waves for gas dynamic isentropic system is onsidered. For the Goursat problem developed in the domain of the interaction, with the help of characteristic analysis, it is proved that there will never appear vacuum in the field of interaction when there is no vacuum on the characteristic boundary. Meanwhile, the existence and uniqueness of the smooth solution is obtained. Further, the result of interaction for two rarefaction waves is presented, that is they penetrate each other or the vacuum appears in the process of the penetration.

Key words: Gas dynamic isentropic equations; rarefaction wave; Goursat problem; uniform a priori estimate; vacuum

* *

(上接第 442 页)

The relation of immersion in module bundles

ZHANG Fei-jun, ZHANG Jun-liang

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi' an 710062, China)

Abstract: The immersed subbundles of free bundles and the immersed free subbundles of any module bundles are constructed, by using theoretics of tensor and module algebra. It is indicated that any module bundles can becomes a immersed subbundles of free bundles, and that there is a free bundles (or projective bundles) is a immersed subbundles of any module bundles also. In particular, the condition which projective bundles change into free bundles is given.

Key words: fibre bundles; module bundles; immersed subbundles; commutative diagram